

Waarom is de wiskunde
zo onwerkelijk

$$e^{\frac{1}{2}\sigma^2\nabla^2}$$

Han de Bruijn

5 maart 2004

Opgedragen aan:
Stefan Denaerde, schrijver van het boek "Buitenaardse Beschaving" [0]
Onder het motto: "De zelfzucht is jullie enige probleem".

ISBN 90 900 8837 7

NUGI-code: 811

Alles uit deze uitgave mag worden overgenomen, met alle middelen die door de moderne techniek worden geboden en zonder dat daarvoor eerst toestemming van de uitgever vereist is.

Voorwoord

Eindigheid van de kosmos, de afmetingen van het elektron bepaald, het probleem van de causaliteit opgelost, de onomkeerbaarheid van de tijd bewezen, zwarte gaten bestaan niet, de massa van elementaire deeltjes aan een maximum gebonden. Ach, het zijn slechts bijprodukten van mijn Grote Overkoepelende Dilemma (GOD).

In dit boek zijn het de kleine dingen die het doen: de kritische massastroom van 215.6 kg/s in een warmtewisselaar; een origineel kleinste kwadraten element voor de ideale vlakke stroming om een cirkel-cylinder.

Ons betoog is gesteld in het Nederlands, mijn moedertaal, omdat ik alleen op deze wijze in staat ben voldoende diepgang te bereiken.

Voor het overige moet het in goede banen leiden van verontwaardiging en spot, inherent aan mijn bemoeienis met het onderwerp, worden gezien als een opgave van de lastigste soort. Maar ik heb besloten dit probleem niet langer als het mijne te zien. Het moet duidelijk zijn dat de persoon van de wiskundige, die door mij ten tonele wordt gevoerd, een abstraktie is, een karikatuur. Hen die zich niettemin bedreigd voelen zou ik willen toeroepen: *get a life!*

Inhoud

1	EXAKTHEID	9
1.1	Voorgeschiedenis	9
1.2	Euklidische wiskunde	12
1.3	Abstraktie of Idealisatie	15
1.4	Moderne meetinstrumenten	18
1.5	Idealistisch determinisme	21
1.6	Met de natte vinger	25
1.7	Verborgen parameters	27
1.8	Vierkante bellen	30
1.9	Mathematische modellen	36
1.10	Materialisatie	39
1.11	Samenvatting	44
1.12	Aantekeningen	45
2	CONSTRUCTIVISME	47
2.1	Het oneindige	47
2.1.1	Onderbreking	52
2.2	De analyse	53
2.2.1	Onderbreking	56
2.3	Poging tot verzoening	57
2.3.1	Onderbreking	61
2.4	Lang leve Plato	61
3	DE NATUURWETTEN	63
3.1	Fysisch oneindig	63
3.2	Wegen naar chaos	65
3.3	QuantumElectroDynamica	68
3.4	Relativiteitstheorie	71
3.5	Zwarte gaten	75
3.6	Quod Erat Demonstrandum	78

3.7	Samenvatting	82
3.8	Aantekeningen	83
4	FUNKTIONEREN	85
4.1	De arbeid	85
4.2	Causaliteit	88
4.3	Werkelijk waar	91
4.4	Historisme	93
4.5	Ekonomische Politiek	98
4.6	Samenvatting	99
4.7	Aantekeningen	100
5	DISKRETE ONDERGROND	103
5.1	Elementaire klassen	103
5.2	Van hetzelfde	106
5.3	Allerlei logika	109
5.4	Paradoxen	114
5.5	Leren tellen	116
5.6	Realistische getallen	118
5.7	Stelling van Brouwer	123
5.8	Samenvatting	128
5.9	Aantekeningen	129
6	CONTINUE BOVENBOUW	131
6.1	OperatorenRekening	131
6.2	DifferentiaalVergelijkingen	133
6.2.1	Voorbeeld 1	133
6.2.2	Voorbeeld 2	135
6.2.3	Voorbeeld 3	136
6.3	Laplace en statistiek	138
6.4	Wazige Optiek	141
6.5	Tastbare functies	143
6.6	Theorie van Bopp	148
6.7	Poreus continuüm	154
6.8	Samenvatting	162
6.9	Aantekeningen	163
7	NUMERIEKE PERIKELEN	165
7.1	Saamhorigheid	165
7.2	Duale samenhang	168
7.3	Tegen de stroom in	173
7.4	Verenigde diffusie	180

7.5	Labrujère's probleem	186
7.6	Samenvatting	191
7.7	Aantekeningen	192
A	APPENDICES	195
A.1	Belangrijke natuurkonstanten	195
A.2	Insluitingsmethode voor π	195
A.3	Eenpijpsmodel	198
A.4	Maresca en Dwyer	201
A.5	DriehoeksAlgebra	202
A.6	VierkantsAlgebra	205
A.7	BASIC NLR	211
A.8	BASIC HdB	219

Hoofdstuk 1

EXAKTHEID

Er is niets wat voor een theoretisch wiskundige vanzelfsprekender is dan het idee dat de wiskunde zich bezig houdt met dingen die "exakt" zijn. Maar wat iedereen voor uitgemaakt houdt, verdient het eerst onderzocht te worden.

Wanneer dit boek begint met een hoofdstuk over geschiedenis, dan moet niet het misverstand ontstaan dat ik van plan ben om de historie van de wiskunde tot in detail te gaan behandelen. Men moet deze uitweiding zien in het licht van één van mijn doelstellingen. Namelijk: aan te tonen dat de huidige "exaktheid", ofwel absolute precisie, van het vak wiskunde, niet kan gelden als iets wat van alle eeuwigheid gegeven is. De exaktheid van de wiskunde is natuurlijk, maar niet vanzelfsprekend.

1.1 Voorgeschiedenis

Het is vrijwel onmogelijk uit te maken hoe en wanneer een bepaalde levensvorm haar evolutie op aarde begonnen is. De vroege ontwikkeling van het mathematisch denken voldoet aan eenzelfde wetmatigheid. Ook de wortels van de boom der kennis liggen begraven in de duistere bodem van een ontoegankelijk verleden. Echter, uit de biologie is bekend dat een embryo in versneld tempo als het ware langs de stamboom van zijn soort omhoogklimt. Uit het feit dat een kind in de baarmoeder aanvankelijk kieuwen heeft, leiden wij terecht af dat de vroege voorouders van zoogdieren (zoals de mens) als vissen in het water hebben geleefd. Niet dat wij deze wetmatigheid letterlijk willen overhevelen. Toch, op soortgelijke wijze is het aannemelijk dat de geestelijke ontwikkeling van een mensenkind de verkorte, globale weergave bevat van een stuk wiskunde-geschiedenis. Wanneer een kleuter

leert tellen met behulp van konkrete voorwerpen, zoals zijn eigen vingers, dan is het niet belachelijk te veronderstellen dat onze voorouders op soortgelijke wijze het getal hebben uitgevonden. Alleen al het feit dat wij nog steeds plegen te rekenen in een tientallig stelsel plaatst de juistheid van deze opvatting eigenlijk buiten kijf.

Zeker is in ieder geval dat de oer-wiskunde lang niet het abstrakte en exakte karakter droeg dat het huidige vakgebied kenmerkt. Ongetwijfeld had zij niet zozeer een theoretische, veeleer een louter praktische, eventueel religieuze betekenis. Een herder wil 's avonds weten of hij al zijn schapen nog bij elkaar heeft. De eerste meetkundigen waren "koordspanners" die stukken land afbakenden. Een Egyptische ambtenaar moest konkreet kunnen berekenen hoeveel bakstenen er nodig waren voor een oprit van "730 ellen lang en 55 ellen breed" [1]. Dat algebra en meetkunde aanvankelijk allesbehalve abstrakt van opzet waren, blijkt ook uit de rekentafels die door de Babyloniërs werden gebruikt. Men had geen behoefte aan "exakte" waarden; benaderingen werden veelvuldig toegepast. Inderdaad kan men zich moeilijk indenken dat de wiskunde ontstaan zou zijn uit een pure "creativiteit van de menselijke geest" (: Brouwer) [2]. De primitieve mens had wel wat anders aan zijn hoofd.

Wiskunde is niet ontsproten aan een "creatieve oer-intuïtie", maar in eerste instantie voortgekomen uit praktische maatschappelijke behoeften en omstandigheden.

Eerst door toedoen van de Griekse beschaving, dus veel later, ging de "geest" van de mens een hoofdrol spelen in de verdere ontwikkeling van de wiskunde. De Griekse wiskunde onderscheidt zich dan ook wezenlijk van de "wiskunde der barbaren", waarin de praktijk primair was. We zien voor het eerst de zo karakteristieke opeenvolging van stelling en bewijs verschijnen in het werk van de Griekse wijsgeer Thales. Om de geschiedenis verder te kunnen volgen is enige kennis van de Griekse wijsbegeerte onontbeerlijk. Vooral de figuur van Plato treedt hierbij naar voren: de invloed van zijn "Akademie" op de ontwikkeling van de exakte wetenschappen is enorm geweest. Laten we daarom enige aandacht besteden aan deze wijsgeer, en zijn "Leer der Ideeën".

De Ideeënleer van Plato houdt ongeveer het volgende in. Plato gaat ervan uit dat alles wat de mens om hem heen waarneemt wezenlijk "onvolmaakt" is. Als hij een boom ziet, dan is dat nooit een volmaakte boom. De stam vertoont rare knobbels, er zijn takken afgebroken. Als hij in een landschap lijnen ontwaart, dan zijn dat nooit volmaakte lijnen. Kortom, de wereld is zeer onvolmaakt. En de mens kan daar geen vrede mee hebben, volgens Plato. Toch hebben alle bomen iets gemeen, hoe onvolmaakt ze ook zijn, namelijk datgene wat kenmerkend is voor een boom, het wezen van wat een boom is, het "bomige". Van het bestaan van dit "bomige" zijn we

ons vaag bewust, we kunnen immers een boom herkennen en zeggen "Dat is een boom". Hoe is dat mogelijk? Wel, zegt Plato, onze geest herkent blijkbaar in al die gebrekkige bomen toch iets van "de Boom", ziet een afspiegeling van de volmaakte Boom in al die bomen. En zo is het met alle dingen op deze wereld: ze vormen slechts een onvolmaakte afspiegeling van Dingen die bestaan in een Wereld waarin alles volmaakt is. Deze Ideale Wereld is de werkelijke wereld. De wereld waarin wij ons stoffelijk bestaan slijten is maar schijn, is slechts een "verschijnsel".

In "De Staat" ("Politeia") van Plato staat de beroemde gelijkenis van de Grot, waarin de mensen de afshaduwingen zien van de Ideeën. Ik heb, dank zij mijn gymnasium achtergrond, zelf de gelegenheid gehad om deze passage in het oorspronkelijk Grieks te lezen, en wil u een enkel fragment niet onthouden. Echter meer weergegeven naar de inhoud dan naar de vorm, een vrije vertaling. Een vollediger bloemlezing is te vinden in [3].

Stel je voor: een onderaardse grot, met daarin een aantal mensen. Ze zijn vanaf hun prille jeugd in die grot opgesloten, geboeid aan handen en voeten, zodat ze niet van hun plaats kunnen komen. Ook zijn ze vastgeketend aan hun hals, zodat ze alleen recht voor zich uit kunnen kijken, en niet om kunnen draaien.

Achter hun rug, hoog en ver boven hen, brandt een vuur. Tussen het vuur en de gevangenen loopt in de hoogte een weg. Langs de hele weg staat een schutting, ongeveer zoals bij een poppenkast een wand staat tussen publiek en spelers, waarboven de poppen worden vertoond. Stel je nu voor dat er mensen achter die schutting lopen die allerlei voorwerpen omhoog houden, zodat ze er juist boven uit steken: beelden van mensen en andere wezens, gemaakt van steen en van hout en van allerlei ander materiaal. Sommigen van de mensen die de dingen dragen lopen te praten, anderen zwijgen.

Die mensen in de grot kunnen van elkaar en van zichzelf niets anders zien dan de schaduwen die door het vuur geworpen worden op de rotswand tegenover hen, en dit geldt ook voor de voorwerpen die boven de schutting voorbijgedragen worden. Ze zijn immers gedwongen om hun hele leven lang alleen die kant op te kijken. Als die mensen nu met elkaar kunnen praten, dan kunnen ze het over niets anders hebben dan de schaduwen die ze op de rotswand zien. Ze zullen erover praten als over de Werkelijkheid. Stel dat er in de grot ook een echo is, die terugkaatst van de rotswand wanneer een van voorbijgangers spreekt. Dan moeten die mensen toch wel denken dat het een voorbijtrekkende schaduw is die geluid maakt ?

Stel je nu eens voor wat de bevrijding uit die gevangenis van onwetendheid voor één van die mensen zou betekenen. Stel dat er één wordt losgemaakt en gedwongen wordt op te staan, zijn hoofd om te draaien, te lopen en tegen het licht op te kijken. Al die handelingen zouden hem

pijn doen en hij zou door de schittering onmogelijk de dingen kunnen zien, waarvan hij zojuist nog de schaduwen goed kon onderscheiden. Hoe zou hij reageren, wanneer men hem zou vertellen dat alles wat hij tot nu toe heeft gezien allemaal grote onzin is, en dat hij nu dichterbij de werkelijkheid is gekomen; dat hij nu een juistere kijk heeft op de dingen, omdat zijn blik nu gericht is op echte voorwerpen? Stel dat men hem bovendien elk voorwerp dat langskomt zou aanwijzen en hem zou dwingen om vragen erover te beantwoorden. Zou die mens dan niet met zijn mond vol tanden staan, en geloven dat de wereld van de schaduwen veel echter is dan wat men hem nu aanwijst? Einde fragment.

Het doel van de wijsgeer is nu om de werkelijke wereld, dat is de Wereld der volmaakte Ideeën, en daarmee het wezen der dingen te leren kennen. Uiteraard kan hij dit niet bereiken door waarneming, want onze waarneming is gebrekkig, en ziet slechts een onvolmaakte wereld. Nee, we kunnen de werkelijkheid der Ideeën slechts aanschouwen met de ogen van de geest. Alleen met onze geest kunnen wij langzaam maar zeker doordringen tot het Wezen der Dingen.

Van welke middelen kan onze geest daarbij gebruik maken? Plato laat ook daar geen misverstand over bestaan: de Wiskunde, bedreven als een zuiver geestelijke bezigheid, en dus bevrijd van alle stoffelijke bijzaken, leent er zich bij uitstek voor om de pure Vormen in het Rijk der Ideeën te leren kennen. Alleen de abstrakte wiskunde immers is in staat om een definitie te geven van de volmaakte rechte lijn, de volmaakte ronde cirkel, de volmaakte kubus. Menig wetenschapper zal dit alles allerm minst verwerpelijk in de oren klinken.

1.2 Euklidische wiskunde

In het beroemde standaardwerk van Euklides, de "Elementen", werd het programma van de Platoonse school grotendeels verwezenlijkt. De Euklidische meetkunde is er inderdaad in geslaagd door te dringen in de wereld van ideale lijnen, cirkels, veelvlakken en bollen zoals Plato zich die voorstelde. Uiteraard kon Euklides zijn theorie niet baseren op getekende figuren. Deze zijn immers maar onvolmaakt en misleidend. De geniale vondst bestaat hierin dat men, in plaats van zich te beroepen op tekeningen, uitgaat van bepaalde waarheden a priori, zogenaamde axioma's. Vanuit die axioma's worden nu alle andere waarheden door middel van zuiver logisch redeneren als stelling afgeleid. Dit is de opeenvolging van "Gegeven", "Te bewijzen", "Bewijs", die in het meetkunde onderwijs op de vroegere middelbare school tot de standaard leerstof behoorde.

De waarde van de axiomatische methode voor de verdere ontwikkeling

van het vak kan moeilijk worden overschat. Men moet zich echter goed realiseren dat axioma's in feite uitgevonden zijn omdat de Ideeënleer van Plato een aanschouwelijke voorstelling van zaken verbood. Met de axiomatisering van de meetkunde kreeg de wiskunde in wezen al het abstracte karakter, waar we heden ten dage zo vertrouwd mee zijn. Nu we echter weten dat axioma-systemen oorspronkelijk zijn bedacht ter wille van een idealistische filosofie, past het een kritische kanttekening te plaatsen.

Een aanschouwelijke voorstelling van meetkundige zaken kan slechts op grond van een zeer bepaalde filosofische overtuiging als minderwaardig of misleidend worden aangemerkt.

Dat men bijvoorbeeld een lijn principieel niet zou kunnen tekenen, is alleen waar binnen het raamwerk van een Platonisch georiënteerde idealistische filosofie. Met de woorden van Isaak Newton (uit de "Principia" als ik me niet vergis): "Inderdaad is echter de meetkunde slechts een tak van de mechanika. Immers behoort de daad van het trekken van een rechte of van een cirkel tot de mechanika; op het trekken van die lijnen echter rust de meetkunde" [4].

Zoals gezegd kan de Euklidische meetkunde gelden als het prototype van een exakte mathematische theorie. Kenmerkend voor deze exaktheid zijn uitspraken als "door twee punten gaat één en slechts één rechte". Wij laten nu zien hoe deze idealisatie van de meetkunde andere wortels van het mathematische denken indringend heeft beïnvloed. Ik denk hier met name aan de elementaire algebra.

Dat algebra en meetkunde hand in hand gingen, is een gegeven dat ons vanuit de oudste geschriften bekend is. Van een akker is inderdaad niet zozeer de vorm, dan wel de oppervlakte belangrijk. Immers deze is een maat voor de hoeveelheid graan die erop verbouwd kan worden. Berekeningen van oppervlakte en inhoud komen dus van oudsher veelvuldig voor. Een uitermate eigenaardig aspect van praktische meetkundige berekeningen moeten we hier even nader belichten. Men kan namelijk de lengte van een gespannen koord of de oppervlakte van een stuk land nooit met volkomen precisie bepalen. Altijd en onvermijdelijk zit er in de uitkomsten een zekere onnauwkeurigheid, een "fout". En aan fouten kan men zich storen. Echter, onder andere uit de berekeningen der Babyloniërs blijkt zonneklaar dat men met deze "onvolmaaktheid" van de praktische meetkunde en de bijbehorende rekenkunde niet zo erg in zijn maag zat. Bijkomend feit is dat de algebra die heel vroeger werd bedreven, met name door de Babyloniërs, louter numeriek van opzet was. Het is duidelijk dat een dergelijke algebra geen aanleiding geeft tot andere dan rationale getalwaarden; men kan steeds volstaan met voldoende nauwkeurige afrondingen en benaderingen. In de tabellen der Babylonische rekenaars treft men dan ook niet anders aan, en niets wijst er op dat men ooit behoefte had aan meer exaktheid [1].

Men heeft de intrinsieke onnauwkeurigheid van praktische meet- en rekenkunde aanvankelijk niet als een onvolkomenheid opgevat.

Inderdaad gaf, en geeft een zekere "speling" in de praktijk geen aanleiding tot onoverkomelijke moeilijkheden. Deze konklusie is belangrijk.

De onnauwkeurigheid die zo karakteristiek is voor de landmeetkunde, verdwijnt echter als bij toverslag zodra zij vertaald wordt in de Euklidische versie. Duidelijk is dat het geïdealiseerde karakter van de laatste hiervoor verantwoordelijk moet worden gesteld. Nu was bij de Grieken de meetkunde hoofdzaak. Zij reduceerden een algebraïsch probleem liefst tot een meetkundig vraagstuk. Toen dan ook de exakte Euklidische meetkunde werd geboren, kon een idealisering van de bijbehorende algebra niet uitblijven. De lengte van een ideaal lijnstuk kan niet anders dan een exakt bepaald getal zijn. Het numerieke rekenen met zijn afrondings- en verwaarlozingspraktijken moest zodoende plaats maken voor een algebra die net zo "foutloos" was als haar zuster, de meetkunde.

Dat de Babyloniërs nooit gekomen zijn tot een exakte algebra, ligt aan hun geheel andere manier van werken. In tegenstelling tot de Grieken, was bij hun de algebra hoofdzaak. Hun meetkunde was een algebraïsche meetkunde. Meetkundige problemen werden ogenblikkelijk vertaald in, en ondergeschikt gemaakt aan een serie numerieke berekeningen. Zoals gezegd geeft het numerieke rekenen van nature geen aanleiding tot idealisaties, zodat de Babylonische wiskunde niet tot een zo verre gaande graad van exaktheid kwam als de Griekse.

De algebra dankt haar huidige exakte karakter grotendeels aan de idealisatie die van de meetkunde is uitgegaan. Het numerieke rekenen zou op zich geen aanleiding hebben gegeven tot een dergelijke absolute nauwkeurigheid.

Toch liep de weg naar het Rijk der Ideeën niet langer over rozen. Het exakt maken van de rekenkunde heeft geleid tot problemen die tot op heden behoren tot de fundamenteelste van de gehele wiskunde. Ik hoef slechts te wijzen op het eeuwenoude dilemma van de irrationale getallen.

Laten we vooropstellen het volgende. De irrationale getallen zijn in eerste instantie afkomstig van lengteberekeningen uitgevoerd in een ideale meetkunde, men denke aan $\sqrt{2}$ en π . Plato zelf was er zich scherp van bewust dat juist daar alle narigheid vandaan kwam. In een praktische meetkunde treden geen onmeetbare getallen op, per definitie niet. Een getal als $\sqrt{2}$ wordt immers pas onmeetbaar wanneer men uitgaat van een ideale gelijkbenig-rechthoekige driehoek, met zijden bestaande uit oneindig dunne lijnstukken. Bij een concreet getekende driehoek is de verhouding tussen de schuine en de rechthoekszijde eenvoudig 1.4 of 1.4142, dat hangt af van de nauwkeurigheid van de constructie. (N.B. Overal in het boek wordt de Engelse notatie aangehouden, met een decimale punt in plaats van een komma.)

Moeilijkheden met irrationale getallen kunnen niet optreden in een primitieve praktische meetkunde. Zij zijn louter het gevolg van een idealistische opvatting van deze meetkunde en de onvermijdelijke doorwerking daarvan in de bijbehorende algebra.

Wie zou willen beweren dat deze problematiek uit de Griekse wiskunde in onze tijd niet meer speelt, hem/haar zou ik er op willen wijzen dat de moeilijkheden rond een exakte fundering van "oneigenlijke functies" van geheel analoge aard zijn. Dat wij tegenwoordig gewend zijn geraakt aan het bestaan van "onmeetbare" getallen betekent nog niet dat zij geen enkel probleem meer vormen. Hun "nette" definitie vergt in het huidige mathematische bestel omzichtige en allesbehalve gemakkelijke limietprocedures, en gaat vergezeld van problematische kwesties als het aktuele of potentiële oneindigheidsbegrip. Wij komen hier in latere hoofdstukken uitgebreid op terug.

Misschien begint de lezer er nu iets van te begrijpen, wanneer ik stel dat de veelgeroemde exaktheid van de tegenwoordige wiskunde niet vanzelfsprekend is. Ik wil nog iets verder gaan en beweren dat de buitensporige precisie van de wiskunde tevens haar zwakste kant is, de Achilleshiel van het vak. Als gevolg hiervan zijn de exakte wetenschappen wel degelijk kwetsbaar.

1.3 Abstraktie of Idealisatie

Alvorens de discussie met vrucht te kunnen voortzetten, zullen we ons bezig moeten houden met een niet onbelangrijke woordenkwestie, om vast te stellen namelijk wat we precies onder de termen "abstrakt" en "ideaal" zullen verstaan. Taalkundige analyse lijkt hiertoe een goede aanzet. Zoals bekend is het woord "abstrakt" afgeleid van het latijnse "abstrahere", hetgeen letterlijk betekent "er van af trekken". Het woord "ideaal" is afgeleid van het Griekse "idea", hetgeen oorspronkelijk "vorm" betekent. Daarbij moet men denken aan de afdruk van een voet in het zand, of de vorm waar een bakker zijn deeg in doet. In het Engels spreekt men nog altijd over de leer van Plato als "the theory of Forms". Aan de hand van de ethymologie van de woorden moeten we van het begin af aan duidelijk uiteenzetten wat, ten behoeve van de eigen kontekst, de wezenlijke verschillen zijn tussen Abstraheren en Idealiseren.

ABSTRAHEREN. Teneinde een graskant enigzins rechtlijnig af te steken, gebruikt men een koord dat strakgespannen wordt tussen twee paaltjes. Van het gebruikte koord is in dit praktijkgeval alleen de "rechtheid" en "langheid" interessant. Daarom lijkt het zinvol om deze twee eigenschappen van het koord te abstraheren. Dat wil zeggen, we trekken de eigen-

schappen "lang" en "recht" van het koord af, en brengen alleen deze twee in rekening. Dit "eruit lichten van hoofdzaken" kan als een positieve vorm van abstraheren worden opgevat.

Men kan ook abstraheren in negatieve zin, namelijk abstraheren van bijzaken. Zoals gezegd zijn van het koord alleen de eigenschappen "recht" en "lang" voor ons doel belangrijk. We gaan dus abstraheren, dat wil zeggen we gaan alle andere eigenschappen die het koord bezit "ervan af trekken" en vervolgens ... weggooien. Omdat we alleen rechtheid en langheid belangrijk wensen te vinden, verwaarlozen we kleur, dikte, gewicht van het koord. Door niet ter zake doende eigenschappen over het hoofd te zien, blijft er alleen datgene over wat aan het koord op dat moment voor ons doel wezenlijk is. Dit kan worden opgevat als een negatieve vorm van abstraheren.

Positieve en negatieve abstraktie komen in wezen op hetzelfde neer. In beide gevallen houdt men alleen zaken over waar het in de gegeven situatie om gaat. Een belangrijke karakteristiek van het abstraktieproces, zoals wij dat willen opvatten, is dat we werkelijk naar het ding zelf blijven kijken. We verliezen de materiële werkelijkheid geen moment uit het oog. Abstraheren vindt dan ook niet zozeer plaats met "de ogen van de geest" dan wel met de ogen van het lichaam. Weliswaar speelt een verstandelijke beoordeling van wat we zien hierbij een belangrijke rol. Het "zien" gebeurt immers voornamelijk in de hersenen, zo is gebleken uit onderzoek.

IDEALISEREN. Wanneer men de eigenschappen "lang" en "recht" eenmaal apart heeft genomen, dan is de verleiding groot om een stap verder te gaan. We nemen alleen de eigenschappen "lang" en "recht" in ons op. We gaan ons dus iets voorstellen wat louter recht en lang is: we denken ons louter de pure "vorm" van het koord. Omdat men de dikte van het koord niet "meeneemt", verdwijnt deze dikte bij de beeldvorming in de geest spoorloos. Een puur lange en rechte lijn is inderdaad alleen maar denkbeeldig, is een idee, de gezuiverde "afdruk" in onze geest van het ding. We spreken van idealisatie. Wanneer men verder gaat nadenken over het aldus gevormde idee "lijn", en ook andere lijnen in zijn beschouwingen betreft, dat kan er een "abstrakte" theorie ontstaan. Zo'n theorie noemen wij echter niet abstrakt, maar "ideaal" of "idealistisch".

En degene die van idealisaties of idealen uitgaat noemen wij een "idealist". Het standaardvoorbeeld van een idealistische theorie is, zoals eerder betoogd, de Euklidische meetkunde. Zij nog opgemerkt dat ik de termen "idealistisch" en "idealist" wens te gebruiken in een strikt zakelijke betekenis, zonder daarmee enig waarde-oordeel uit te spreken.

Wij willen voorts verdedigen dat een abstraktie in eerste instantie niet zo ver hoeft te gaan dat er van idealisatie sprake is. De schilder praat over lijnen in een landschap. De sportvisser zet een lijntje uit. De schei-

dsrechter fluit als de bal over de lijn gaat. Ongetwijfeld worden al deze lijnen gekenmerkt doordat ze lang, dun en recht zijn. Het blijkt echter dat de omgangstaal uiterst flexibel is in het hanteren van normen voor hoe lang, hoe dun en hoe recht een lijn precies behoort te zijn. Zeker heeft men hier met vormen van abstraktie te maken, maar ik geloof dat men moeilijk van idealisatie kan spreken. Zo is niet in te zien dat het begrip "lijn" abstrakter zou zijn dan het begrip "koe". Beide woorden hebben in het gewone spraakgebruik betrekking op konkrete dingen: "koe" slaat op iets wat je in de wei tegenkomt, "lijn" slaat op iets wat dun, recht en lang is. Wat is nu het wezenlijke verschil in het niveau van abstraktie? Of is het alleen maar omdat de wiskunde vaker over lijnen gaat dan over koeien?

Bij abstraktie ziet men de realiteit zoals die is onder ogen, maar men poogt in die realiteit hoofdzaken van bijzaken te onderscheiden. En alleen de hoofdzaken worden expliciet in rekening gebracht, terwijl de bijzaken worden verwaarloosd. Idealisatie gaat een wezenlijke stap verder. De geabstraheerde hoofdzaken nemen vervolgens een louter denkbeeldige Vorm aan. Men concentreert zich niet langer op de stoffelijke werkelijkheid, maar op zekere ideeën in de gedachtenwereld. De gevormde begrippen krijgen daardoor een min of meer absoluut karakter. Zo is een ideale lijn oneindig lang, geheel zonder dikte en helemaal precies recht. En hoe vergaat het de bijzaken? Slecht, bijzonder slecht. Bijzaken worden door de idealist gezien als storend, als foutief. Ze kunnen eigenlijk helemaal niet worden getolereerd in zijn "modellen".

Maar als ik nu de stelling zou verdedigen dat in de gewone omgang tussen mensen in het geheel geen vormen van idealisme worden geëxpliciteerd, dan is het heel gemakkelijk om mij daarop aan te vallen. Om te beginnen is er het argument dat je *eerst* ergens een idee van moet hebben, alvorens je dingen in de werkelijkheid naar dat idee kunt benoemen. Maar er is meer. Mensen zijn kennelijk in staat om zaken in te richten naar ideeën die ze in hun hoofd hebben; ze zijn in staat om de werkelijkheid overeenkomstig hun ideeën te *veranderen*!

Een uitvinding doen is een idee hebben van iets *dat er nog niet is*, om vervolgens de werkelijkheid *naar die Vorm* gebogen te krijgen. Ik zal het dus moeilijk krijgen als ik het denkbeeld zou willen handhaven, dat het krijgen van een idee per se vooraf gegaan wordt door het maken van een abstraktie. Een mogelijke opvatting is ook dat het idee "lijn" eerder een soort van mal is, een vorm waar zaken uit de werkelijkheid "in worden gelegd", een blauwdruk a priori waarmee de dingen om ons heen worden vergeleken, bijvoorbeeld om uit te maken of wij ze al dan niet "lijnen" zullen noemen.

Wat is primair? Het idee of de ervaring? Dat is de vraag waar het hier om gaat. Komen de ideeën als geïdealiseerde abstrakties, uit de ervaring

voort? Of komt de ervaring uit de ideeën voort, kunnen wij alleen maar ervaren dank zij onze ideeën? Is de wiskunde een *ontdekking* of een *uitvinding*? Zijn het Abstrakties van de werkelijkheid, of zijn het oorspronkelijke Ideeën die bepalend zijn voor ons (mathematisch) denken en doen?

Wanneer deze wijsgerige controverse, die teruggaat op een konflikt tussen de Griekse filosofen Plato en Aristoteles, op grond van filosofische argumenten kon worden beslecht, dan was dat zeker in de klassieke oudheid al gebeurd. Er moet dus naar andere argumenten worden gezocht, argumenten namelijk die alleen in de moderne tijd kunnen worden aangetroffen, en waar de wijsgeren uit de klassieke oudheid ten enen male nog niet over konden beschikken.

Ik wil het volgende hoofdstuk wijden aan de vraag of abstrakties en ideeën onlosmakelijk met elkaar verbonden zouden zijn, of er dus alleen maar ideale abstrakties kunnen bestaan. Goede voorbeelden van louter abstraktie worden ons wellicht niet aan de hand gedaan, zolang we ons uitsluitend inlaten met de activiteiten van mensen. De wiskunde lijkt ons daarentegen te laten zien dat abstrakties en idealen in het geheel niet van elkaar zijn los te koppelen.

1.4 Moderne meetinstrumenten

Wil men de wijsgeren uit de Griekse tijd aftroeven met een beter argument, dan is het verstandig te bedenken dat het begrip "waarneembaarheid" bij de huidige stand van de technologie lang niet meer de betekenis heeft van vroeger, toen de mensen waren aangewezen op niets anders dan hun eigen, onbedekte zintuigen.

We zeggen gemakkelijk "Ik meet de stroom door die draad". Maar het was altijd al moeilijk aan te nemen dat de ampèremeter geen uitslag meer te zien zou geven zodra ik het lokaal uitwandel. Vandaag de dag is er meer aan de hand. Ik kan in het meetcircuit een Personal Computer opnemen, en er voor zorgen dat de uitkomst zwart op wit wordt vastgelegd. Ik kan tijdens mijn afwezigheid de computer zelfs opdracht geven, aan de hand van de gemeten stroomsterkte, zekere akties te ondernemen, zoals het afschakelen van de stroom. Was het in de vorige eeuw misschien nog wel zo dat een meetinstrument kon worden beschouwd als een verlengstuk van de menselijke waarneming, in de moderne tijd wordt het met de dag moeilijker om een dergelijke opvatting vol te houden. Ampèremeters blijken op zich genomen redelijk zelfstandige instrumenten, die ook zonder de tussenkomst van mensen heel goed in staat zijn om elektrische stromen te meten. We zeggen "Ik meet dat en dat gewicht", wanneer er een gewicht op de weegschaal gezet wordt en de wijzer slaat uit, pardon: de digitale

display geeft een getal te zien. De display zal dat getal ook te zien geven als ik er niet ben. Het is tegenwoordig zelfs zo dat weegschalen in een supermarkt de mogelijkheden van een compleet computersysteem in zich hebben. Ze kunnen weeggetallen doorgeven aan bijvoorbeeld een centrale database. En het systeem kan aan de hand van deze gegevens zelfstandig beslissingen nemen, zoals het plaatsen van een bestelling.

Vanuit dit gezichtspunt zijn meetinstrumenten min of meer zelfstandige wezens die ook zonder menselijke tussenkomst het vermogen bezitten om waarnemingen te verrichten en te verwerken.

Is het in al deze gevallen niet zo dat we in feite de technologie alle klusjes voor ons laten opknappen? We steken er zelf nog nauwelijks een vinger naar uit! Uiteindelijk laten we de natuur, buiten ons eigen lichaam om, opdraven voor het doen van het gros van "onze" moderne waarnemingen. In nog veel sterkere mate is dit het geval met de onbemande robots die we de ruimte insturen. Wie een beetje oog heeft voor het eigen leven dat ons instrumentarium in toenemende mate is gaan leiden, hij zal toch moeten toegeven dat bovenstaande konklusie iedere dag meer gerechtvaardigd wordt. Een en ander is in overeenstemming met de visie van de Chardin [5] dat de menselijke cultuur integraal deel uit maakt van de natuur: cultuur is natuur, voortgezet op een hoger plan. De maatschappelijke werkelijkheid bestaat niet alleen uit mensen maar ook uit alles wat door mensen gemaakt is, ook uit machines en instrumenten. Maatschappelijke en natuurlijke werkelijkheid raken zodoende meer en meer met elkaar verstrengeld. De Mens en de Natuur van elkaar te onderscheiden, dat wordt een steeds absurdere opgave. De meetinstrumenten die wij maken zijn daarom niet langer een verlengstuk van onze eigen ogen. Nee, de meetinstrumenten die wij maken zijn in feite geworden tot zelfstandige zintuigen, waarmee de natuur "zichzelf" kan zien en betasten.

Dit brengt mij tot de volgende overweging. Als we bezig zijn met het maken van Abstrakties; ik heb het nu even niet over het krijgen van een goed Idee. Stel dat iets noch door ons, noch door alle mogelijke andere zintuigen (lees: meetinstrumenten) waargenomen kan worden, valt er dan wel iets van te abstraheren? Als de natuur zelf op geen enkele manier in staat blijkt om dingen te "zien" waar wij toch (wiskundige) abstrakties van menen te moeten maken, waar zijn we dan mee bezig? Ik stel voor dat we, bij deze, het strijdtoneel streng afbakenen en dat we ons, wat "echte" abstrakties betreft, voortaan beperken tot fysieke of fysische waarneembaarheid. De enige werkelijkheid die ons interesseert is een materiële, zo u wilt een technische aangelegenheid. Het "zien met de ogen van de geest" wordt een tweede plaats toegewezen. Simpel gesteld: we gaan eerst goed kijken en daarna pas denken. Onwerkelijke, dat wil zeggen fysisch en fysiek onwaarneembare bestanddelen worden zoveel mogelijk geweerd.

Bij de uitvoering van dit programma zijn we met name geïnteresseerd in zaken binnen de ideale wiskunde, die *aantoonbaar begonnen zijn als abstrakties* van de werkelijkheid. Een uitstekend voorbeeld is al de Euklidische meetkunde. Maar met name *uit het taalgebruik* binnen andere wiskundige disciplines valt dikwijls af te leiden dat ook deze begonnen moeten zijn als een samenstel van abstrakties, en niet als een stel ideeën die lukraak uit de lucht worden gegrepen. Gewone woorden uit de omgangstaal zoals "verzameling", "vereniging" en "buurt" (we doen slechts een willekeurige greep) duiden erop dat wiskundige begrippen veelvuldig worden afgekeken van de materiële wereld om ons heen. Bijkomend hulpmiddel is de geschiedenis. Vooral bij ontwikkelingen na 1900 kan men allerlei historische details nog redelijk goed natrekken, met betrekking tot de vraag waar de wiskunde zijn "inspiratie" vandaan heeft gehaald.

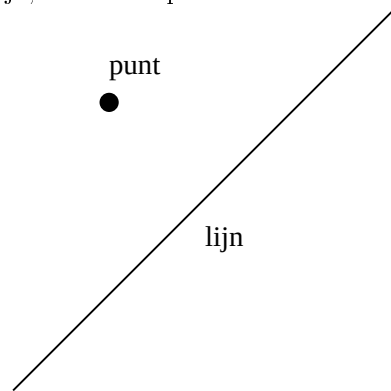
"Wij mensen bezitten als enige wezens op aarde het vermogen tot abstraheren". Na onze beschouwingen over de zelfstandigheid van meetinstrumenten moet deze zinsnede als enigzins voorbarig worden bestempeld. Wat is namelijk het geval. Een instrument als de meetlat kan slechts één eigenschap meten van alle zaken waarmee hij in contact wordt gebracht, namelijk de lengte ervan. Insgelijks een instrument als de balans, die ook slechts één eigenschap kan meten van alles waarmee hij in contact wordt gebracht, namelijk het gewicht ervan. Laten wij dit nu eens als volgt formuleren: de meetlat abstraheert de lengte van iets, de balans abstraheert het gewicht van iets. Wat hebben we dan verkeerd gezegd? Een stroommeter doet in beginsel hetzelfde: hij meet in een draad alleen de stroomsterkte, en abstraheert deze dus. Zo ook: een klok abstraheert tijd. Algemeen:

Metten is een zuivere vorm van abstraheren: er vindt geen idealisatie plaats. Een meetinstrument is dus het voorbeeld bij uitstek van een zuiver abstrak-tie mechanisme.

De konsekwenties zijn nu gemakkelijk te trekken, indien Homo Sapiens tenminste bereid is een ogenblik het trotse hoofd te buigen, teneinde zich met het stof dezer wereld te vereenzelvigen. Wanneer wij louter abstrakt willen denken, in eerste instantie zonder de verdere stap te zetten naar idealisatie, dan zullen wij in de leer moeten gaan bij onze apparatuur. Ik denk dat met name bij het ontwikkelen van wiskunde die toegepast gaat worden, deze eerste stap geen overbodige luxe is. We moeten onze gedachten formuleren in experimentele termen. Abstrakt denken is dus in eerste instantie: het doen van gedachte-experimenten. Dit is geen nieuwe methode. In de discussies tussen Einstein, Bohr en anderen, die ontwikkeling van QuantumMechanica en RelativiteitsTheorie hebben begeleid, speelden gedachte-experimenten een zeer belangrijke rol.

Abstrakte lijnen ontstaan door langs een gespannen koord een meetlat te leggen. Die meetlat pakt van het gespannen koord alleen de lengte op,

abstraheert dus het koord tot iets wat uitsluitend "lang" is. Een gevolg van deze wijze van werken is dat de tekening nog steeds "wiskundige" waarde heeft. Immers doordat lijnen en punten in deze zienswijze niet louter denkbeeldig zijn, kan men ze nog steeds echt tekenen, en gewoon zeggen: dit IS een lijn, dit IS een punt:



Ideale lijnen ontstaan pas door van deze abstrakties de Vorm te verabsoluteren. En door over deze ideale lijnen na te denken ontstaat een uiterst doeltreffende Ideale Meetkunde. Men moet echter niet vergeten dat deze idealisatie juist daarom doeltreffend is, omdat zij is begonnen als een historisch geleidelijke, en daardoor *zorgvuldige* abstraktie van de meetkunde in de praktijk. Wanneer men de eerste fase goed heeft afgerond, dan zal in de tweede fase het Ideaal ongetwijfeld gemakkelijker, en dichter kunnen worden benaderd.

Zorgvuldige abstraktie, dat zal voor het vervolg van ons verhaal een sleutelwoord blijken te zijn. We zouden de Idealen van de wiskunde willen sorteren op de zorgvuldigheid waarmee zij aanvankelijk geabstraheerd werden, uitgaande van de materiële werkelijkheid.

1.5 Idealistisch determinisme

Bedoeld wordt het zogenaamde "mechanistische materialisme" van Laplace. Volgens deze leer staat een systeem van onveranderlijke algemene natuurwetten boven de materie, als heersend principe. Het gedrag van ieder systeem wordt *exakt* bepaald door een stelsel vergelijkingen. Wanneer de begin- en randvoorwaarden gegeven zijn, dan ligt de gehele toekomst van het systeem onwrikbaar vast. Alles wat in de toekomst gebeuren zal is volledig en vooraf bepaald door wat in het verleden gebeurd is. Er kan niets gebeuren wat niet al gebeuren moet, en alles wat gebeuren moet zal ook gebeuren [6].

De louter idealistische oorsprong van het Laplaciaanse denken is niet moeilijk te achterhalen. Wij hebben gezien dat de wiskunde haar achterliggende filosofie grotendeels te danken heeft aan de Ideeënleer van Plato. Toen de natuurkunde zich ging bedienen van mathematische hulpmiddelen, werden ook hele stukken van de achterliggende Platonische filosofie als vanzelfsprekend overgenomen. Toen de Newtonse mechanica de strikte denkmethoden van de Euclidische meetkunde in zich opnam, werd de exaktheid van de natuurwetten geboren. Immers, nooit kan door enig experiment geverifieerd worden of een natuurwet inderdaad "exakt" is. Hoogstens kan worden nagegaan dat zij opgaat met een formidabele nauwkeurigheid. Er is geen enkel geval bekend van een serie volmaakte causale een-een relaties die in beginsel ongelimiteerd nauwkeurige voorspellingen mogelijk zouden maken. Elke wet heeft onvermijdelijk haar fouten, en deze zijn een net zo noodzakelijk onderdeel van de definitie van de werkelijke betekenis ervan als de gevolgen van de wet die juist zijn [7].

Niettemin, juist dank zij haar exakt wiskundige formulering boekte de fysica succes op succes. De wetenschappelijke revolutie die zich voltrok moet op velen een verbluffende indruk hebben gemaakt. Het is daarom begrijpelijk dat men de exakte geldigheid der natuurwetten langzamerhand als een onbetwistbaar feit ging accepteren. De gevolgtrekking die Laplace maakte was slechts een uiterste konsekwentie van dit onbeperkte vertrouwen dat men in de fysica, eigenlijk dus in de wiskunde had. Het "mechanistisch materialisme" van Laplace, "idealistisch determinisme" lijkt ons een betere naam, berust geheel op deze metafysische veronderstelling dat natuurwetten een exakte geldigheid bezitten, en is dus niet zozeer van fysische dan wel van mathematische origine. Samengevat:

De exaktheid van natuurwetten kan alleen maar van idealistisch mathematische aard zijn. In de (experimentele) fysica is er geen enkele wetenschappelijke basis voor te vinden.

Ik geef toe dat deze stelling een open deur is voor mensen die in de minder esoterische gebieden van de wetenschap, zoals bijvoorbeeld de Materiaalkunde [8], aan het werk zijn. Voor hen is duidelijk wat de status is van de natuurwetten waar zij mee werken: een accuraat gereedschap en anders niet. Afgezien daarvan is er behoorlijk wat literatuur waarin het indeterminisme van zowel de klassieke als de moderne fysica breed wordt uitgemeten [9]. In al deze discussies wordt echter de rol van een exakte wiskunde onderschat, en onderbelicht.

Met de filosofie van een absoluut determinisme haalde de wetenschap een ware doodsvijand binnen haar muren. Met name werd menselijke vrijheid een dilemma. Inderdaad een schrikbarende gedachte, dat je hele menszijn van boven af is geprogrammeerd, zonder dat je zelf ook maar iets aan de loop van dat programma zou kunnen veranderen. Ondanks pogingen van menig

wijsgeer om zaken een andere wending te geven, leeft deze noodlotsfilosofie voort. Hoe dikwijls hoort men niet zeggen: "Er is toch niets aan te doen. Alles komt zoals het moet komen". Als dit iemands levensovertuiging is, nog tot daaraan toe. Maar het ergste is dat men een dergelijke verzuchting vaak ook nog denkt te kunnen onderbouwen met wetenschappelijke argumenten. In nauw verband hiermee staan absolutistische uitspraken als "Je kunt de natuur van een mens niet veranderen; de mens is van nature nu eenmaal zus en zo", hetgeen maar al te vaak wordt aangevoerd als een gemakkelijk excuus om de bestaande orde te rechtvaardigen. Het idealistisch determinisme heeft de verhouding tussen wetmatigheid en vrijheid gemaakt tot een absurditeit, een karikatuur. Wanneer een mens per definitie niet meer zelf verantwoordelijk gesteld kan worden voor zijn daden, dan is dat niet alleen voor de wetenschap gevaarlijk. Nicolaas Kroese zei eens: "Met deze wiskunde kon men de atoombom maken; ze is dus niet goed". De kleurrijke Amsterdammer Kroese had patenten op een "Universele Wiskunde", legde met groot gemak een verband tussen betonkanker, boomkanker en borstkanker, en bestreed al deze vormen van kanker met aardstraalkastjes van eigen fabriek. Pikant detail is dat hij er in slaagde om wiskundigen tot wanhoop te drijven, in plaats van dat zij zich wisten te vermaken. In dit verband hou ik het erop dat kinderen en gekken soms de waarheid spreken.

Zoals gezegd is het Laplaciaanse determinisme idealistisch van oorsprong en karakter. Er was dus bij voorbaat al geen enkele reden om aan te nemen dat het ook maar enige werkelijkheidswaarde bezit. Zelfs al zou de hele wereld gegoten kunnen worden in een differentiaalvergelijking met rand- en beginvoorwaarden, dan nog is er geen enkele reden tot fatalisme. Een volmaakt exakte oplossing is immers nodig, teneinde de wereld als een foutloze machine te laten draaien. Het Opperwezen van Laplace moet dus bij machte zijn een letterlijk oneindige nauwkeurigheid te hanteren en te realiseren. Maar een dergelijke Almacht hoort niet thuis in de materiële wereld. Het kan niet genoeg worden beklemtoond dat ook de zogenaamde NatuurWetten van de theoretische fysica volgens onze manier van denken niet meer zullen voorstellen dan een *beperkte benadering* van de werkelijkheid, een tamelijk eenzijdige poging bovendien [8] om die werkelijkheid te omvatten. In ieder geval is de bereikte nauwkeurigheid ruim voldoende om ons als mensen in staat te stellen op een adequate manier techniek te bedrijven, daar kunnen voor- en tegenstanders het over eens zijn. Maar zou men niet kunnen overwegen of met de realiseerbaarheid van alle mogelijke toepassingen niet tegelijk het "genoeg" van deze nauwkeurigheid is gedefinieerd?

Men spreekt in de techniek over een numerieke benadering. In dit boek zullen we herhaaldelijk ook de term "analytische benadering" laten vallen. De analyse is ons inziens namelijk slechts een andere, niet een per definitie

”betere” manier om de werkelijkheid in wiskundige termen te vatten. We zullen nog voorbeelden te over tegenkomen van situaties waarin het benaderende karakter van de analyse een uitgemaakte zaak is. Het zal blijken dat deze andere kijk op de analyse essentieel kan zijn voor een beter begrip van de natuurwetten.

De revolutionaire wetenschappelijke ontwikkelingen in het begin van deze eeuw, de opkomst van de relativiteitstheorie en vooral van de quantummechanica, gaven het determinisme een eerste klap. Met name de quantummechanica maakte inbreuk op de gevestigde orde: de onzekerheidsrelaties van Heisenberg houden in dat plaats en impuls, of energie en tijd, van een deeltje *niet tegelijk exakt bepaald* kunnen zijn. Het lag voor de hand dat niet alle fysici dit voetstoots zouden accepteren. Met name Einstein heeft zich hier nooit mee kunnen verzoenen. Het determinisme van Laplace moest koste wat het kost worden gered. Wij zullen verderop zien dat de relativiteitstheorie van Einstein reeds op elementair niveau inderdaad onverenigbaar is met de quantummechanica. Ik denk dat Einstein dit instinctief als een bedreiging heeft ervaren, en zich daarom zo verzette.

Na alles wat er deze eeuw gebeurd is had de fysica metterdaad tot het inzicht kunnen komen dat er geen absoluut determinisme bestaat, en dat de exaktheid van geaccepteerde ”natuurwetten” hoogstwaarschijnlijk van tijdelijke aard is. Zelfs de eens onaantastbaar geachte wetten van Newton bleken tenslotte niet meer voor te stellen dan een (zeer) goede benadering. Het bewuste gebruik van benaderende theorieën, de zogenaamde mathematische ”modellen”, heeft trouwens steeds meer ingang gevonden. Tegenwoordig zijn er vaak meerdere, even ”goede” theorieën die hetzelfde verschijnsel kunnen verklaren. De verschillende ingangen tot de quantummechanica (Schrödinger vergelijking versus Heisenberg ”picture”) zijn hier een goed voorbeeld van. De opvatting is gegroeid dat de ene theorie slechts een graad nauwkeuriger kan zijn dan een andere, en dat er meerdere theorieën kunnen bestaan die elk weer een ander aspect belichten van dezelfde materie.

De tijd is binnenkort toch wel voorbij dat de natuurkundige in zijn formules de absolute waarheid gevonden dacht te hebben. Niet dus. Met name de theoretische fysica blijft volharden in volstrekt onbuigzame wiskundige formuleringen. Er valt in die hoek zelfs een toenemende hang naar mathematische exaktheid te konstateren. Zwaarder geschut dan de eenvoudige filosofische bespiegelingen uit dit hoofdstuk zullen denkelijk nodig zijn om dat deel van de wereld tot andere gedachten te brengen.

1.6 Met de natte vinger

Iedereen die technische wetenschappen heeft gestudeerd kan het opgevallen zijn dat er een enigzins schizofrene verhouding heerst tussen enerzijds de mathemaaat, die alles heel precies tracht te formuleren en te bewijzen, en anderzijds de technicus, die al dat precieze op een dikwijls heel wat minder precieze manier in praktijk brengt. De technicus springt met de wiskunde "slordig" om. Ik heb me van begin af aan verwonderd over dit klaarblijkelijke *misverstand* tussen mathematen en technici. Nog herinner ik me dat college Electrotechniek, waarbij de docent eerst het bord volschreef, met formules zoals ze exakt zouden gelden voor een transistor schakeling. Vervolgens merkte hij op dat de formules in deze vorm niet erg bruikbaar waren. En toen begon het: dit is klein, en dat is klein, dit is te verwaarlozen, dat valt weg. Term na term werd weggestreept. Geen zorgvuldige limietovergangen, nee, gewoon het betere veeg- en kraswerk. En de simpele formule die uiteindelijk overbleef stond in geen enkel herkenbaar verband met de "exakte natuurwetten" die aanvankelijk het bord hadden gesierd.

Ik heb maar al te vaak meegemaakt dat men zich van wiskundige zijde meewarig, ja zelfs misprijzend uitliet over deze verwaarlozingspraktijken van technici. Eigenlijk toch maar "vies" wat jullie doen. Aangezien echter niet te ontkennen valt dat ook de mathematiek van een technicus niettemin een vorm van wiskunde voorstelt, kan het niet anders of de wiskunde is feitelijk verdeeld in twee kampen: de theoretische "zuivere" wiskunde aan de ene kant, en de toegepaste "wiskunde met de natte vinger" aan de andere kant. Vanuit de zuivere wiskunde wordt de technische wiskunde maar al te vaak gezien als een gebrekkige poging om de "echte" wiskunde in praktijk te brengen. Van intuïtionistische zijde werd mij zelfs eens te verstaan gegeven dat de natuurwetenschappen, om over de technische wetenschappen maar helemaal te zwijgen, "nog lang niet toe" zijn aan het gebruik van verfijnde wiskundige instrumenten, zoals die van hen.

De klassieke wiskunde is een autonome wetenschap. Zij ontleent enige inspiratie aan de materiële werkelijkheid, maar staat er verder grotendeels los van. Wanneer nu ter oplossing van een praktisch probleem een mathematische aanpak wenselijk wordt geacht, dan probeert men in eerste instantie uit het voorradig arsenaal van wiskundig materiaal een schema te vinden dat min of meer bij het probleem in kwestie lijkt te passen. Vervolgens komt het er vaak op neer dat men een compromis bewerkstelligt tussen het konkrete vraagstuk en het ideale, exakte stramien. Waarbij de wiskunde nog al eens "op de pijnbank" moet. Zo is met name de analyse, in de strikte vorm die door de wiskunde wordt toegeleverd, vaak niet goed hanteerbaar voor praktische doeleinden.

In het grensgebied tussen formele en praktische wiskunde doen zich

inderdaad best grote moeilijkheden voor. Het is iedere technicus bekend hoe lastig en vervelend het in rekening brengen van "fouten" is, wanneer men een formeel wiskundig model met proeven confronteert, of met met behulp van de computer probeert aan te pakken. Dit betekent in het huidige wetenschappelijke bestel een slecht gedefinieerde overgang van het exakte naar de benadering, van strikt naar ongeveer.

Een gevolg van de idealistische aanpak is dat bij terugvertalen van model naar werkelijkheid gebruik moet worden gemaakt van de zogenaamde "natte vinger". Dit houdt feitelijk in dat de uitkomsten van het mathematische model slechts serieus worden genomen in zoverre ze niet al te zeer in tegenspraak zijn met wat men wel noemt "het fysische gevoel", de praktische ervaring dus. Wanneer men voor het eerst kennis maakt met toepassingen van de wiskunde, bijvoorbeeld in de natuurkunde, dan is deze diskrepantie één van de dingen die vrijwel meteen moet opvallen.

De verwaarlozingspraktijken van de technicus hebben tot op de dag van vandaag weinig genade kunnen vinden in de ogen van de rechtgeaarde mathematicus. Toch willen we hier een pleidooi houden voor de technicus. Zijn spreekwoordelijke "slordigheid" is werkelijk niet bedoeld om zijn mathematische collega's te ergeren, maar heeft gegronde redenen.

Het is met de wiskundige als met een maker van potloden. Deze potlodenmaker is zo ingenomen met zijn werk dat hij de hele dag aan niets anders denkt dan: hoe kan ik aan mijn potloden nog scherpere punten maken. Hij schaft de duurste apparaten aan om punten van bijna onmogelijke scherpheid te fabriceren. Vol trots brengt hij de potloden tenslotte op de markt. Een technicus komt belangstellend bij zijn kraampje staan en wil wel enkele van die potloden kopen, als hij er tenminste eerst één ter plekke mag uitproberen. Dan gaat er wat mis. De technicus kan de lijn die hij getrokken heeft zelfs helemaal niet zien. Hij trekt daarop de conclusie dat de punt aan het potlood gewoon veel te scherp is. Geen nood. Voor de ogen van de verbouwde potlodenmaker krast hij er een paar keer stevig mee over de tafel bij het kraampje. En dat helpt uitstekend! De technicus merkt vervolgens op dat de potloden wel wat duur zijn, maar haalt toch geld uit zijn zak om te betalen. Wat gebeurt echter? De potlodenmaker is verschrikkelijk boos geworden, en weigert zijn potloden te verkopen.

Twintig jaar geleden waren het slechts enkelingen die het in hun hoofd haalden om kanttekeningen te plaatsen bij het gegeven dat de wiskunde een zelfstandige, onafhankelijke, zuivere wetenschap is, en vraagtekens te zetten bij het idee dat wiskundigen zelf wel bepalen wat voor het vak al dan niet interessant is. Ik noem hier met name Preston C. Hammer [10], een Amerikaanse hoogleraar in de "Computer Science", met wie ik een korte briefwisseling heb gehad (: we konden het toch niet met elkaar eens worden). Maar de tijden zijn veranderd. Voorzichtig, soms onder de dek-

mantel van cynische humor, hoort men steeds meer andere geluiden. In de NAG Newsletter 1/88 lezen we over "De Onvermijdelijkheid van Industriële Wiskunde" [11]. Vijf jaar later gaat in Engeland een universitaire faculteit der Industriële Wiskunde in bedrijf. Waar rook is, is vuur. Afkomstig uit de referentie is het volgende verhaal. Een astronoom, een fysicus en een mathemaat zitten samen in een luchtballon. Op een gegeven ogenblik zien zij beneden een zwart schaap lopen. De astronoom reageert hierop met de woorden: "Zie je wel, alle schapen zijn zwart". De fysicus relativeert: "Er zijn blijkbaar ook zwarte schapen". "Allebei fout", zegt de mathemaat: "er bestaat tenminste één schaap waarvan de bovenkant zwart is".

1.7 Verborgene parameters

Zorgelijker dan de discrepantie tussen de praktische en theoretische wiskunde is het volgende. Er is bij nader inzien een probleem met de wetenschappelijk ongemotiveerde vooronderstelling dat alles wat door wiskundigen wordt bedacht zonder vorm van kritiek overgenomen kan worden. Een mathematische beschrijving bevat zodoende, naast idealisaties die inderdaad uit de materiële werkelijkheid afkomstig zijn, ook elementen die een produkt zijn van louter geestelijke activiteit, zo u wilt de creatieve inbreng van de onafhankelijke wiskundige onderzoeker. Deze innige verwevenheid van geïdealiseerde feiten en zuivere gedachtenspinsels kan het totaalbeeld danig vertroebelen. Zo erg dat men puur wiskundige problemen voor fysische moeilijkheden aanziet en omgekeerd. Het zou mij niet verbazen indien op grond van deze overweging bepaalde onderdelen van de natuurkunde in aanmerking komen als riskante vakgebieden. Ik doel hier op delen van de fysika welke geheel en al zijn aangewezen op een een betrouwbare mathematische grondslag, om reden dat er geen aanschouwelijke voorstellingen voorhanden zijn die korrigerend kunnen werken: "de natte vinger doet het niet". Met name de Elementaire DeeltjesFysica en de Kosmologie [12] komen op grond van het bovenstaande in aanmerking om, zeg, nader te worden bestudeerd. Laten we, gezien de hoge kosten die gemoeid zijn met dit fundamenteel fysisch onderzoek, bidden en hopen dat mijn twijfels ongegrond zijn.

Het eerste wat zou moeten gebeuren als men wiskunde gaat toepassen in een andere discipline, dat is kritisch nagaan welke vooronderstellingen aan de betreffende mathematische theorie ten grondslag liggen. De wiskunde blijft werkelijk niet boven alle verdenking verheven zodra het gaat over toepassing op materiële zaken.

Puur mathematische uitgangspunten zouden bij toepassing per ongeluk wel eens kunnen veranderen in puur fysische uitgangspunten.

Wanneer men bijvoorbeeld een stuk Euklidische meetkunde van toepassing

acht op de fysische theorie betreffende elementaire deeltjes, dan wordt onderhuids meegenomen de veronderstelling dat "punten" geen ruimtelijke uitgebreidheid bezitten. Wie garandeert mij dat, aan het eind van de lopende band, niet zal blijken dat dit aanleiding heeft gegeven tot konklusies die fysisch niet juist zijn? Stel dat de mathematische veronderstelling inderdaad niet heeft gedeugd, doch op een gecompliceerde manier heeft doorgewerkt in de rest van de theorie. Het gaat bovendien om een theorie die op zichzelf al gespeend is van iedere mogelijkheid tot correctie onderweg, middels een controle "op fysisch gevoel". Men moet blindvaren op een korrekte wiskunde, inclusief verborgen parameters. Van de laatste mag dan toch wel worden verwacht dat ze niet alleen wiskundig, doch ook *fysisch* helemaal in orde zijn.

Wanneer een wiskundige meent dat zijn hele wereld te herleiden is tot een brok verzamelingenleer, dan kan men toch niet serieus menen dat zoiets zonder meer, per definitie, van toepassing is op ieder ander wetenschappelijk wereldbeeld? Is het niet ongelofelijk dat niemand zelfs maar de moeite heeft genomen om de axioma's van de verzamelingenleer te toetsen aan de fysische werkelijkheid? Ongelofelijk maar waar. Zo blind is ons vertrouwen in de wiskunde. Men ziet vervolgens dat deze verzamelingenleer, bijvoorbeeld vermomd als de topologie van een Lie-groep op een vierdimensionaal manifold, maar nog steeds compleet met alle ongeverifieerde vooronderstellingen, doodgemoedereerd wordt binnengedragen in een toch al ondoorzichtig en allesbehalve uitgekristalliseerd vak als de elementaire deeltjes fysica. Is er dan niemand die de ramp al ziet aankomen? De keten is toch zo zwak als de zwakste schakel! Hoe kan men verwachten korrekte konklusies te verkrijgen uit ondeugdelijke premissen, alle wiskundig vernuft ten spijt?

Niet verdacht zijn op verborgen veronderstellingen die via de wiskunde het vak kunnen binnensluipen. Dat zou voor bepaalde vakgebieden wel eens vergelijkbaar kunnen zijn met het binnenhalen van het paard van Troje. Wat dat betreft wordt menigmaal niet zo zorgvuldig te werk gegaan als ik grond van de kwalifikatie "wetenschappelijk" zou mogen aannemen. Met name in theoretische publikaties slaat men gemakshalve de inductieve fase maar over. Het kritisch bekijken en systematisch interpreteren van aanschouwelijk materiaal lijkt soms geheel tot het verleden te behoren. We hebben immers zo geweldig veel wiskunde tot onze beschikking. Ja, er is altijd wel een geprefabriceerd axiomastelsel te vinden met voldoende parameters, zodat er althans nog iets van lijkt te kloppen.

Overigens is het inderdaad merkwaardig dat mathematische theorieën altijd zo letterlijk op de natuur van toepassing lijken. En dit ondanks het feit dat het hele vakgebied ontsproten zou zijn aan een pure "kreativiteit van de geest". Geen wonder dat de meest fantastische bespiegelingen de ronde doen. De wereld zou zich gedragen "als een groot schaakspel, dat

gespeeld wordt door de goden" (: Feynman). Dat de natuur "gehoorzaam aan mathematische wetten" is een veel gehoorde gemeenplaats. Een "bewijs" hiervan vindt men in de geschiedenis. Niemand had immers ooit vermoed dat de leer der kegelsneden iets te maken had met planeetbanen. Imaginaire getallen werden om zichzelf bedacht, maar konden in de elektrotechniek konkreeet ten nutte worden gemaakt. De niet-Euklidische meetkundes vonden een toepassing in Einstein's algemene relativiteitstheorie. Groepentheorie een matrixrekening bleken van toepassing in de quantummechanika.

Bewijst dit alles nu werkelijk dat de natuur zich zonder meer zou storen aan menselijke gedachtenspinsels? Ik ben zo vrij dat een *irrationeel* idee te vinden, en ik wil een poging ondernemen om het omgekeerde te poneren:

Is het niet precies andersom? Toont de geschiedenis van het menselijk denken niet eerder aan dat er in de wiskunde een NATUURLIJKE en bovendien doelgerichte ontwikkeling is. De natuur gehoorzaamt niet aan wiskundige, doch de wiskunde gehoorzaamt aan natuurlijke wetten, natuurwetten namelijk die bepalen hoe een evolutie in zijn werk gaat.

Het feit dat de wiskunde zich, over het algemeen, organisch ontwikkelt is zeker bemoedigend. Het ontslaat ons echter nog niet van de verplichting om niettemin deze ontwikkeling *kritisch* gade te slaan. Het is volstrekt irrationeel te menen dat alles wat zich als wiskunde aandient zonder enige korrektie van toepassing is op processen die allesbehalve ideëel verlopen. Bovendien, wie zegt dat een gegeven ontwikkeling automatisch de "goede" kant uitgaat? Maken we ons dan niet schuldig aan de zoveelste metafysische veronderstelling? Dat het wel voor elkaar komt wanneer we de zaken ongecontroleerd op hun beloop laten. Jaja, waarom zou dat wél gelden voor de wiskunde, en niet voor andere dingen die de mensen doen.

Men heeft zich altijd verbaasd over de klaarblijkelijke toepasbaarheid van de wiskunde. Aan die toepasbaarheid ontleent de wiskunde trouwens grotendeels haar bestaansrecht, maar dat is een andere kwestie. Uit ons verhaal blijkt dat de toepasbaarheid van de wiskunde niet helemaal berust op toeval, op genialiteit, op goddelijke inspiratie, of welke metafysische reden men verder moge bedenken. De toepasbaarheid van de wiskunde, voorzover inderdaad aanwezig, komt voor een belangrijk deel hiervandaan dat nog al wat begrippen in de wiskunde de juiste idealisaties zijn van dingen in de materiële werkelijkheid. We hebben het nu over geëigende, goede idealisaties, die met enige zorg uit de werkelijkheid zijn gedestilleerd.

In het geval van de complexe getallen, om een voorbeeld te noemen, wordt zo'n zorgvuldige idealisatie (van de reële getallen namelijk) gevolgd door een generalisatie naar paren van reële getallen. Deze paren van getallen voldoen aan rekenregels die zo gekozen zijn dat zoveel mogelijk eigenschappen van de reële getallen ook voor de complexe getallen blijven opgaan. Het

is alleszins verrassend dat zo'n veralgemenisering wederom van toepassing is op de praktijk, maar dit heeft absoluut niets te maken met een buitenaards mirakel. De werkelijke betekenis ervan is dat het een *natuurlijke* gang van zaken is om voort te borduren op een bepaald succesvol stramien. Ook in de biologie kan dit veelvuldig worden waargenomen. Het toepasbaar zijn van generalisaties is op deze manier op te vatten als een eigenschap van de wiskunde als levensvorm [5]. Geen bovennatuurlijk wonder dus, maar wel degelijk een wonder: even wonderlijk namelijk als het leven op aarde zelf.

Echter, wiskunde is mensenwerk, en niets dan mensenwerk. Tegenover de goede en juiste idealisaties staan de slechte en onjuiste idealen, hersenspinsels welke ontstaan zijn door onzorgvuldige observatie van de realiteit, gebrekkige en half afgemaakte afbeeldingen van materiële zaken. Of erger: ideeën die nergens op slaan, zaken die zomaar uit de lucht zijn gegrepen. Sommige daarvan hebben zich zelfs een vaste plaats binnen de wiskunde weten te verwerven. Dit zou een mogelijke verklaring kunnen zijn voor de relatief geringe toepasbaarheid van sommige wiskundige disciplines. Enigzins vooruitlopend op het betoog willen we in dit verband alvast een fingerwijzing doen: naar de mathematische logika en de verzamelingenleer.

Uit doorgaans welingelichte bron (: dit is de plaats om Dik Groot te bedanken voor zijn bijdrage aan het boek) heb ik vernomen dat er een evolutieleer van de wetenschap bestaat die zegt dat Ideeën welke in strijd zijn met hun omgeving zullen uitsterven. Dit zal ik zeker niet willen ontkennen. Maar ik zou eraan willen toevoegen dat, indien wij niet bewust onze verantwoordelijkheid nemen, deze Ideeën misschien niet eerder uitsterven dan samen met ons, het mensenras dat ze tot leven wekte. Het is een kwestie van "Zien, of omkomen" [5].

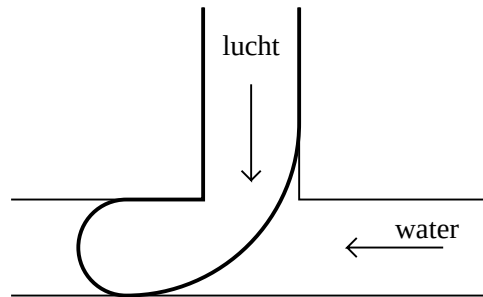
1.8 Vierkante bellen

Het volgende hoofdstuk zal gaan over "mathematische modellen". Als inleiding op deze materie is de nu volgende anekdote relevant. Het verhaal bevat een aantal konkrete wiskundige elementen. En die zijn essentieel. Ik nodig de lezer uit om een of twee formules niet uit de weg te gaan. Technisch is de stof eenvoudig genoeg om uitgaande van weinig meer dan middelbare school kennis begrepen te kunnen worden.

Jaren geleden, ik was toen vierdejaars student aan de Technische Hogeschool Eindhoven, kreeg ik bij wijze van stage-opdracht het volgende probleem te verwerken. En om eerlijk te zijn, ik was toentertijd niet in staat om het op een goede manier aan te pakken, laat staan op te lossen. Met name van een toepasselijke theorie kwam hoegenaamd niets terecht. O ja, wel allerlei ingewikkelde formules over tensoren op gekromde oppervlakken, een stuk

"fundamentele bellentheorie" dat uiteindelijk nergens op bleek te slaan.

Gegeven is een blokje perspex met daarin uitgeboord twee capillaire buisjes, één buisje horizontaal door het blokje heen, één buisje vertikaal daarop, loodrecht uitkomend op het eerste. De capillairen komen samen op één punt, en vormen daar een omgekeerde hoofdletter T, vandaar ook de naam "T-stuk". De diameter van de capillairen bedraagt 1.0 millimeter. Water stroomt van rechts naar links door het horizontale buisje, lucht stroomt van boven naar onder door het vertikale buisje. Waar de twee media elkaar ontmoeten vormen zich luchtbellens. Het mengsel van lucht en water stroomt via het horizontale buisje naar buiten. Hieronder volgt een schets van het T-stuk, met daarin het beeld van een aangroeiende luchtbel, gezien van opzij:



Onafhankelijke variabelen zijn de volumestromen van lucht en water, ook wel genoemd luchtdebiet F_L en waterdebiet F_W . Afhankelijk variabelen zijn de frequentie f van de belvorming en het luchtbelvolume V_L . (Overigens zou men met evenveel recht uit kunnen gaan van het volume van de "water"bellens V_W). Zoals men licht kan inzien, bestaat er een eenvoudig verband tussen de frequentie en de belvolumes: $V_L = F_L/f$ en $V_W = F_W/f$. De bedoeling was om ook proefondervindelijk vast te stellen of er een verband bestaat tussen de onafhankelijke en de afhankelijke variabelen. Gemeten waarden zijn weergegeven in onderstaande tabel. (De waarde gemerkt met (*) was oorspronkelijk 1.9, hetgeen hoogstwaarschijnlijk berust op een schrijffout tijdens de metingen.)

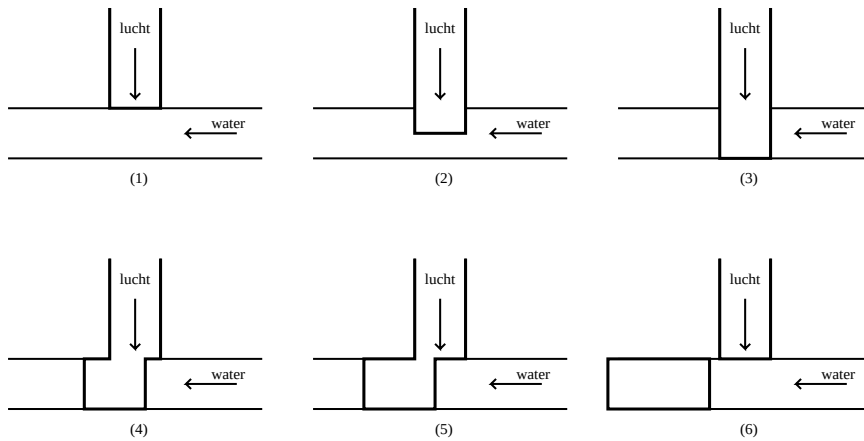
Lucht (mm^3/s)	Water (mm^3/s)	frequentie ($1/s$)
44	56	31
62	50	35
66	45	35
78	45	37
140	41	43
149	42	44,5
29	70	25
18	79	20
9	98	14,5
6	133	11
21	177	42
18	180	35
14	199	30
7	205	19 *
9	232	22
1	235	2,4
33	145	47
49	135	57
55	135	62
62	124	60
66	117	65
91	117	80
95	152	80
96	109	75
99	108	73
120	112	90
122	92	76
145	115	92
146	98	88
157	98	97
169	100	95

Vervolgens werd van mij verwacht dat ik de metingen zou verklaren met behulp van een *mathematisch model*. Kosten nog moeite werden gespaard. Er werd een film van het verschijnsel gemaakt, teneinde het beter te kunnen bestuderen. Na het zien van de film, loste niet ik, maar een vriend en medestudent van me, het probleem in 5 minuten op. Hij schreef de oplossing op de achterkant van een bierviltje (: we zaten in het lokale studentencafé).

Jacques deed een paar aannamen die het hele probleem drastisch vereenvoudigden. Achteraf moeten we vaststellen dat hij intuïtief heel goed begrepen moet hebben waar het bij het ontwerpen van een mathematisch

model op aan komt. Laten we om te beginnen maar eens aannemen dat de vorming van de luchtbellen in het geheel niet afhangt van de oppervlaktespanning, en daarmee ook niet van een eventuele kromming van de oppervlakken. Dan is het in feite niet zo belangrijk welke vorm het beloppervlak precies bezit (dit in schrille tegenstelling tot wat ik altijd had gedacht). Wanneer de bellen niet rond behoeven te zijn, dan kunnen we ons voor het gemak indenken dat ze in plaats daarvan, schrik niet: *vierkant* zijn. Dit nu blijkt de cruciale stap te wezen. Het is duidelijk dat men onmogelijk zover kan komen zonder een dosis verbeeldingskracht, zonder zich los te maken van de directe ogenschijnlijke ervaring. Wat hier gebeurt overstijgt het vermogen van een simpel waarnemingsinstrument. Hier komt een *mens* aan te pas. Er is niet langer sprake van abstraktie, maar van *idealisatie*.

Voortbordurend op de vierkante bellen kan men vervolgens een geïdealiseerd scenario opstellen voor de belvorming in het T-stuk. Aangenomen wordt dat een en ander, modelmatig, in zijn werk gaat als weergegeven in de volgende figuur:



Het idee is dus dat eerst de bel door de luchtstroom tot tegen de overzijde van het waterkanaal wordt gedrukt (fase 1-3), en daarna door de waterstroom over de breedte van het luchtkanaal wordt afgeknepen (fase 4-6). Aan de hand van dit geïdealiseerde beeld is het zowaar mogelijk een zinvolle berekening op te zetten:

De tijd nodig voor fase 1-3 = diameter water-kanaal / lucht-snelheid

De tijd nodig voor fase 4-6 = diameter lucht-kanaal / water-snelheid

Ofwel: $t_{13} = d/(F_L/A)$; $t_{46} = d/(F_W/A)$.

Zodat: $t_{13} = V_O/F_L$; $t_{46} = V_O/F_W$.

Hierin is A = stromingsdoorsnede, d = kanaaldiameter.
 Zodat V_O = een soort "nul" volume, waarbij $V_O = Ad$.
 De totale tijd nodig voor belvorming is: $t_{16} = t_{13} + t_{46} =$

$$1/f = V_O(1/F_L + 1/F_W)$$

Het volume van de luchtbel is dus:

$$V_L = F_L/f = V_O(1 + F_L/F_W)$$

De enige nog onbekende grootte in deze formule is V_O .

Dit "nulvolume" kan op twee manieren worden bepaald. De eerste manier gaat uit van een ruwe schatting: het volume moet inliggen tussen dat van een bol en een cylinder. Uitgaande van het gegeven dat de diameter van de capillaire $1mm$ is, vinden we voor de cylinder: $\pi d^3/4 = 0.785$ en de bol: $\pi d^3/6 = 0.52$.

Op de tweede plaats kunnen we proberen het model in overeenstemming te brengen met de metingen. Stel $x = F_L/F_W$ en $y = V_L$. Een kleinste kwadraten aanpassing geeft:

$$\sum_{i=1}^N \{V_O[1 + x_i] - y_i\}^2 = \text{minimaal}$$

waarin N het aantal meetpunten is. Dit is een kwadratische functie in V_O :

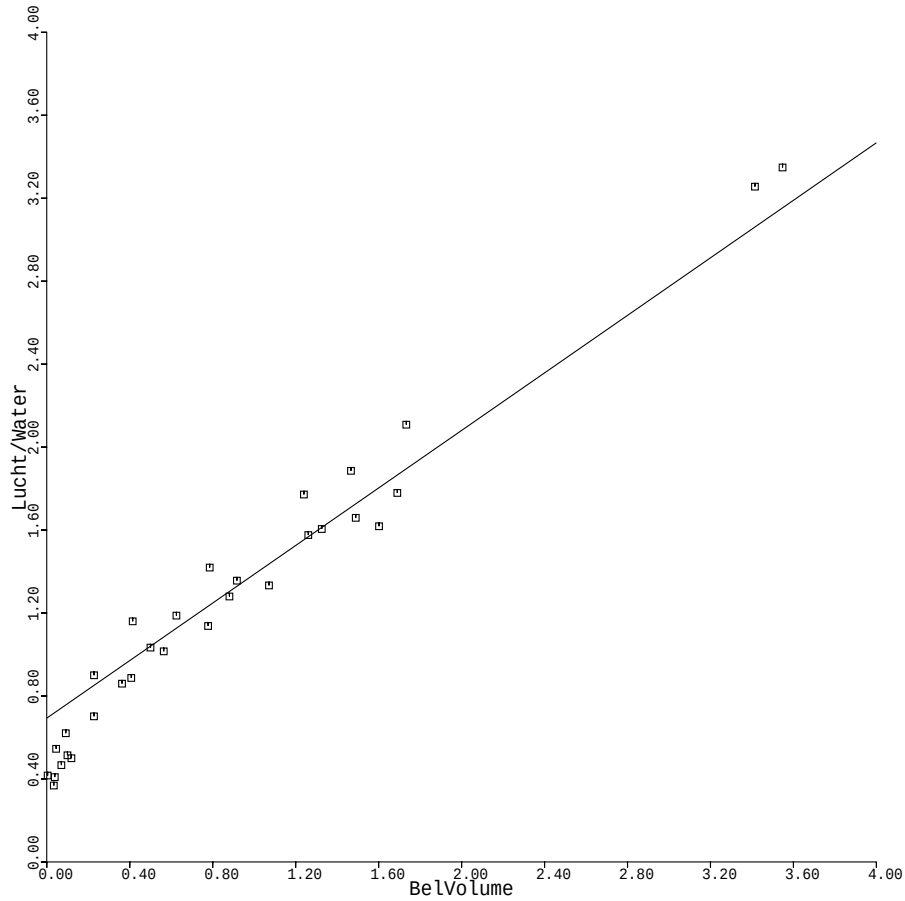
$$AV_O^2 - 2BV_O + C = \text{minimaal}$$

Met: $A = \sum_{i=1}^N (1 + x_i)^2$; $B = \sum_{i=1}^N (1 + x_i)y_i$, $C = \sum_{i=1}^N y_i^2$. Zoals bekend wordt het minimum van deze parabool, met V_O als onafhankelijke variabele, gevonden voor: $V_O = B/A$. Ofwel:

$$V_O = \frac{\sum_{i=1}^N (1 + x_i)y_i}{\sum_{i=1}^N (1 + x_i)^2}$$

Dit geeft uit de metingen een waarde van $V_O = 0.6934510 = 0.7mm^3$. Zodat de experimentele waarde inderdaad tussen de ruwe theoretische waarden in ligt.

Zetten we tenslotte metingen en berekeningen samen uit in een grafiek. Dan is onder andere te zien dat voor de kleinste belvolumes de metingen systematisch afwijken van de berekening. Dit kan worden verklaard doordat bij een krachtiger waterstroom de bellen eerder worden "afgeknepen", dat is voordat hun nulvolume V_O wordt bereikt.



We hebben afgeleid de fundamentele natuurwet voor de vorming van bellen in een T-stuk: $V_L = V_O(1 + F_L/F_W)$. Een wet die overtuigt door eenvoud en elegantie. Er gaat een zekere bekoring uit van zulke formules, zegt men, en men vraagt zich af wat in diepste wezen toch de grond is van deze schoonheid. In het geval van de belvorming is het antwoord duidelijk: de schoonheid van de gevonden formule is uitsluitend te danken aan de dramatische *vereenvoudiging* die we hebben toegepast. De schoonheid ontstaat niet doordat we de werkelijkheid in al haar bijzonderheden hebben gevat, maar juist doordat we hebben *afgezien* van de meeste aspecten van de werkelijkheid, niet doordat we de hele waarheid hebben nagestreefd, maar juist doordat we die waarheid *niet* hebben nagestreefd. Het paradoxale is

dat we daardoor toch dichter bij "de waarheid" zijn gekomen. Immers, het resultaat is kwantitatief, stemt goed overeen met de experimenten, kortom is precies wat men van een (klein) stukje wetenschap mag verwachten.

Waarom zo veel aandacht geschonken aan een relatief onbenullige "toepassing" zoals deze? Ik had het hierboven dan wel over de *fundamentele* natuurwet van de belvorming in een T-stuk, maar dat zal ongetwijfeld bedoeld zijn als een beeldspraak. Schrijver dezes gaat toch niet vertellen dat een formule voor onnozele belletjes, hoe aardig hij er ook uitziet, eenzelfde status heeft als bijvoorbeeld de wetten van de Newton of de Lorenz transformaties? Mis. Dat gaat deze schrijver dus *wel* vertellen. Een van de kernpunten is namelijk dat, naarmate men er dieper over nadenkt, er geen *wezenlijk* onderscheid meer gemaakt kan worden tussen "fundamenteel" en "toegepast" onderzoek. Als we wat verder zijn, zal gaandeweg blijken dat dit onderscheid steeds moeilijker is vol te houden, en tenslotte als vanzelf verdwijnt. Welliswaar kan men verdedigen dat $F = m \cdot a$ een breder toepassingsgebied heeft dan $V_L = V_O(1 + F_L/F_W)$, en in die zin fundamenteler is. Maar ik hou staande dat het daarbij gaat om een *gradueel*, niet om een essentieel verschil.

Men kan niet ergens tussen de natuurwetten een grens trekken en zeggen: aan deze kant is alles exakt, en aan die kant is alles een benadering.

Ook de schoonheid van "echte" natuurwetten berust zodoende op zinsbegoocheling. Ze is louter het resultaat van vereenvoudiging, een simplificatie die *door ons mensen zelf*, al dan niet doelbewust, wordt aangebracht, en die in wezen de werkelijkheid geweld aandoet, in plaats van deze te omvatten. Het zal me straks een waar genoegen zijn om een en ander nog eens flink aan te zetten, door bij voorkeur grofstoffelijke werktuigbouwkundige toepassingen te berde te brengen, als illustratie van wat het betekent een "fundamentele natuurwet" in handen te hebben.

1.9 Mathematische modellen

Zoals we hebben uiteengezet, dankt de wiskunde haar huidige idealistische karakter aan een stuk historische ontwikkeling. In deze evolutie blijkt een hoofdrol te zijn weggelegd voor de filosofie van Plato. Zonder aan de grote historische betekenis van Plato's filosofie afbreuk te willen doen, hebben we vastgesteld dat de leer der Ideeën bepaald niet getuigt van praktijkgericht denken. Dit is zeker geen toeval, en wordt verklaarbaar indien men bedenkt dat Plato afkomstig was uit een aristocratisch milieu. Bovendien leefde hij in een slavenmaatschappij. Filosofie bedrijven was in die tijd weggelegd voor vrije burgers, dat wil zeggen voor mensen die vrijgesteld zijn van arbeid. Praktisch werk doen was immers een slavenbezigheid. Dat Plato de

materiële realiteit als daarom hinderlijk en minderwaardig ervaren, is niet zo heel verwonderlijk.

Dat door Plato's idealistische opvattingen de wiskunde meer los is komen te staan van de praktijk, is niet zonder meer "logisch", maar wel begrijpelijk.

Niettemin kan men vaststellen dat deze scheiding, historisch gezien, groot nut heeft gehad. Men moet erkennen dat de wiskunde zonder een idealistische periode niet veel verder gekomen zou zijn. Het biedt werkelijk grote voordelen wanneer men in een tijd van primitieve praktische technieken niet van de realiteit hoeft uit te gaan. Een "wiskunde gebaseerd op de materiële werkelijkheid" zou ten tijde van de Grieken al helemaal niets voorgesteld hebben, eenvoudig omdat geen kennis van belang omtrent die materiële werkelijkheid voorhanden was. Dat men, bij gebrek aan behoorlijk ontwikkelde instrumentele technieken, uitgaat van de geestelijke activiteit van de mens is dus alleen maar zinvol.

Oorspronkelijk dachten de mensen materialistisch. Zij waren immers met handen en voeten aan de werkelijkheid gebonden. Wij noemen dit eerste stadium van het menselijk denken *naïef materialisme*. Wetenschap en maatschappij zouden nooit tot hun huidige peil van ontwikkeling zijn uitgegroeid wanneer de mensen in dit naïeve materialisme waren blijven steken. Het idealisme van Plato moet daarom ook gezien worden als een noodzakelijke fase in de ontwikkeling van het menselijk denken. Alleen dank zij de bevrijdende werking van een idealistische filosofie hebben met name de wiskunde en de natuurwetenschappen een zo grootse ontwikkeling kunnen doormaken. Om met de realiteit te leren leven is het soms nodig zich ervan te ontdoen. Dit is een ervaringsfeit van veel mensen, en het blijkt dus ook op te gaan in een wijder historisch perspectief.

Intussen leven we echter lang niet meer in een maatschappij als die van Plato. Dat wiskunde zich voornamelijk bezig houdt met ideale dingen, dat zal iemand die met het vak onbekend is dan ook enigszins merkwaardig in de oren klinken. Men kan de persoon in kwestie daarom geen gebrek aan intelligentie verwijten. Tegelijk met het vak brengt men immers een stuk idealistische filosofie over, en waarom zou van onze leerlingen mogen worden verwacht dat zij deze ideologie uit lang vervlogen tijden vanzelfsprekend en kritiekloos in zich opnemen? Het idealisme van de klassieke mathematicus is namelijk in onze tijd al lang geen vanzelfsprekende levenshouding meer. We hoeven maar om ons heen te kijken om in te zien dat mensen tegenwoordig zeer wel in staat zijn om wetenschap te bedrijven met andere middelen dan louter geestelijke. Wij zouden ons dus echt niet meer schuldig maken aan naïef materialisme wanneer we aan de huidige materiële realiteit meer voorrang wensen te geven. Sterker nog, wij vinden *dat de stoffelijke werkelijkheid zonder meer tot de aandachtsgebieden van de theoretische wiskunde behoort.*

Er is altijd wel een weg te vinden om een dreigende diskrepantie tussen theorie en praktijk te voorkomen. Als er al veldwerkers waren die geneigd waren tot een kritische houding jegens de theorie, dan heeft dat zich in ieder geval nooit geuit in een aanpassing van hun mathematische gereedschap. Misschien heeft men zich niet de onwelwillendheid van de wiskundigen op de hals willen halen, had men schrik om in dat vakgebied echt in te grijpen, gunde men zich de tijd niet. Of misschien ook is iedere poging in die richting gewoon spaak gelopen. Hoe het ook zij, in ieder geval werd een ingenieuze uitweg bedacht die alle partijen kon bevredigen: het zogenaamde *mathematische model*. Enerzijds erkende men dat de wiskunde niet in staat was om de werkelijkheid afdoende te beschrijven. Anderzijds ontnam men haar niet het recht om, op de geheel eigen manier, een exakte wetenschap te zijn, en te blijven.

De filosofie van het mathematische model is DE manier bij uitstek om te ontkomen aan een mogelijk konflikt tussen de theoretische wiskunde en de praktische toepassing.

Uit ons enthousiaste verhaal over de "vierkante bellen" moge blijken dat deze bewering niet uitsluitend in negatieve zin is bedoeld. De feiten gebiedens ons te benadrukken dat aan de filosofie van het mathematische model, uitgedrukt op zijn allerzachtst, heel wat positieve aspecten zitten.

Het belangrijkste positieve aspect van de model-filosofie is werkelijkheidszin. Wanneer wetenschappers een denkkader bouwen dat zij als een mathematisch model betitelen, dan *weten* zij dat daarin de werkelijkheid slechts onvolledig en bij benadering is vervat. Dit staat in schrille tegenstelling met het geloof in absolute natuurwetten, dat met name nog opgeld doet in bepaalde delen van de fundamentele theoretische natuurkunde. Bescheidenheid siert de geleerde: al wat wij mathematisch kunnen beschrijven is slechts een Vorm, een "model", de naam zegt het reeds. Sporadisch komt men echter een andere opvatting tegen. Zoals het verhaal van iemand die beweerde dat hij een mathematisch model van *de* hersenen had ontwikkeld. Wanneer zo iemand naar mij toe was gekomen, dan had ik hem willen antwoorden: "zeker een model van *jouw* hersenen".

De filosofie van het mathematische model is een uitweg die mede bedoeld is om het eigenaardige idealistische karakter van de huidige wiskunde geen geweld aan te doen. Hier zit een positief en een negatief aspect aan. Negatief in zoverre er louter sprake is van weglopen voor een probleem. Men laat de theoretische wiskunde zijn gang gaan, en neemt de resultaten kritiekloos over, alsof zo iets geen impact kan hebben op zijn vakgebied. Positief omdat er wel degelijk sprake is van een echte oplossing, van het dilemma namelijk dat de wiskunde een ideale wereld beschrijft, terwijl de wereld dat in werkelijkheid niet is, en toch moet er koste wat kost een brug geslagen worden.

In 1973, meer dan 20 jaar geleden nu, schreef ik met jeugdige overmoed een als afstudeerverslag bedoeld werkstuk, getiteld: "Grondslagen voor een Materialistische Wiskunde" [13]. Plaats was de toenmalige Technische Hogeschool Eindhoven (de tegenwoordige TUE), onderzoeksgroep der Theoretische Natuurkunde. Een program van actie zoals dat werd aangekondigd in [13] moet worden bestempeld als hopeloos. Wat betreft een echte "materialistische wiskunde", dat zou een wiskunde zijn die geen ideale elementen toelaat, valt geen enkele eer te behalen. Zo'n wiskunde zou, met aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid, neerkomen op het terugzetten van de klok. In alle gevallen die ik heb gezien, is gebleken dat pogingen om het proces van idealisatie te omzeilen neerkomen op een benadering die niet te onderscheiden is van naief materialisme.

Er is nog een ander argument. Een consequent "materialistische wiskunde" zou neerkomen op een standpunt wat zo mogelijk nog stringenter is dan dat van de intuïtionisten. Nu dient men voor de stroming van het intuïtionisme binnen de moderne wiskunde het nodige respect op te brengen. Maar één ding kan men deze richting zeker niet nageven, dat is dat ze praktisch bruikbaar en handig zou wezen. Met name waar het de analyse betreft is dat zeker niet het geval. Dit is dus ook wat eventuele "grondslagen voor een materialistische wiskunde" aangaat een teken aan de wand. Er is een mathemaat geweest die hier verstandige dingen over heeft gezegd, en die we nog uitgebreid aan het woord zullen laten: Gerhard Gentzen.

Op geen enkel moment in mijn loopbaan heb ik aanleiding gevonden om wat betreft de wiskunde anders te handelen dan op de gebruikelijke wijze: door het gericht toepassen van idealisatie, middels de filosofie van het mathematische model. Blijft als een paal boven water dat men aan de moderne mens dient uit te leggen welke de plaats is die aan het fenomeen "idealisatie" binnen de exakte wetenschappen dient te worden toegewezen. We hebben alvast het volgende vastgesteld. Feit is dat idealisatie "werkt". Maar het houdt ook gevaren in, en het verhaal daarover is veel minder wervend. Hopelijk is iedereen, na lezing van dit boek, oplettend genoeg om zich nog niet een keer door de schittering der volmaakte Ideeën op het verkeerde been te laten zetten.

1.10 Materialisatie

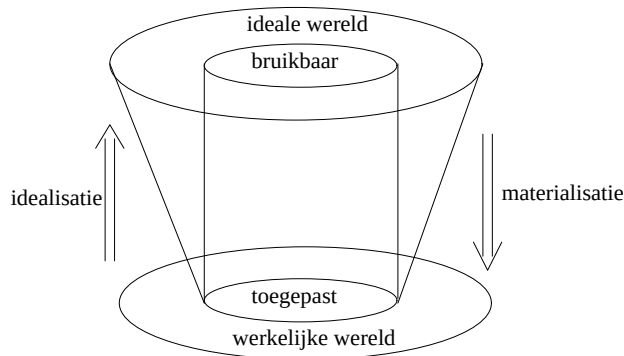
De wiskunde is een wetenschap met een lange en indrukwekkende geschiedenis. Haar verworvenheden zijn talrijk. En in niet geringe mate is dit te danken aan de omstandigheid dat wiskundigen zich af en toe juist *niet* wensten bezig te houden met materiële zaken. Deze wat ik genoemd heb *idealistische* levenshouding is het hoofdonderwerp van mijn kritiek. Al ver-

schillende malen ben ik echter gedwongen geweest om gas terug te nemen. Tegenover de wellicht al te zeer benadrukte nadelen van deze filosofie staan onmiskenbare voordelen. We hebben om te beginnen de filosofie van het mathematische model bekrachtigd. Nu wordt het tijd om in meer algemene zin een plaats toe te kennen aan idealen van mathematische origine.

Complexe getallen en multi-dimensionale vectorruimten zouden waarschijnlijk nooit ontdekt zijn indien men was uitgegaan van de materiële werkelijkheid en anders niet. Het zou daarom bepaald te betreuren zijn wanneer in de toekomst verbeeldingskracht en fantasie binnen het vak wiskunde geen kans meer kregen, en wanneer men zich iedere keer zou moeten storen aan het direkt praktisch nut. Mijn kritiek op de idealistische denkwijze is dan ook niet bedoeld om haar het recht van spreken te ontfemen. Het is echter *wel degelijk* mijn bedoeling om de idealistische denkwijze weer de plaats toe te kennen die haar toekomt. Het moet met name afgelopen zijn met de metafysische Idee als zou alles wat een wiskundige verzint zonder meer toepasbaar zijn op de materiële werkelijkheid, in het bijzonder op de fundamentele fysika.

De toestand is enigzins vergelijkbaar met de verhouding tussen de klassieke mechanika en de quantummechanika. De quantummechanika kent het zogenaamde correspondentie-beginsel, dat is een verbinding richting klassieke mechanika die het mogelijk maakt dat de nieuwe theorie in voorkomende gevallen van de oude theorie resultaten kan "lenen". Dat kan niet zonder meer. Men heeft een soort van vertaalslag ontwikkeld waar het klassieke resultaat eerst doorheen moet. Zo'n correspondentie beginsel is verstandig. Het is tijdverspilling om alles wat gedaan is eerst weg te gooien, om daarna weer alles opnieuw te moeten opbouwen. Temeer omdat het nieuwe gebouw ongetwijfeld grote gelijkenis zal vertonen met het oude. Immers, ook de klassieke mechanika was, en is, bepaald niet gespeend van realiteitsgehalte. Verreweg de meeste praktische toepassingen komen nog altijd op rekening van de klassieke mechanika trouwens.

Ook wij willen niet het kind met het badwater weggooien. De klassieke wiskunde bevat, in idealistische verpakking, zeer veel aspecten die duidelijk afkomstig zijn uit de praktijk van het leven, dat wil zeggen: materiële elementen met een idealistisch jasje aan. Daarom zijn de klassieke theorieën een onmisbare voedingsbodem. Laat ons zien hoe we van deze bodem op efficiënte wijze ons voedsel kunnen betrekken. We denken daarbij aan een zelfde principe als in de quantum mechanika, een soort vertaalslag dus, vanuit de Ideale Wereld, richting materiële werkelijkheid. Ik wil er even vanaf zijn of het hier de materiële werkelijkheid *zelf* betreft of de allereerste Abstrakties ervan.



De eerste stap is wat wij zullen noemen: *materialisatie*. Dat is precies het tegenovergestelde van idealisatie. Dat wil zeggen: we gaan de klassieke theorie proberen te vertalen in termen van de praktijk. Wegens de abstraktheid van de meeste mathematische theorieën moet daarbij een grote voorzichtigheid in acht worden genomen. (Denk aan kind en badwater!) Anderzijds moet men ook weer niet al te benauwd zijn. Sommige stukken wiskunde zullen onder praktische kritiek gewoon bezwijken, en dat is omdat ze, in een toepassingsgerichte visie, toch al niet zoveel voorstelden.

Kort en goed: ontdoe de klassieke theorie van zijn idealistische bemonstering en probeer de materiële kern bloot te leggen. Wanneer het mogelijk is om op die manier vanuit de klassieke wiskunde weer met de beide benen op de grond te komen, dan is het natuurlijk ook mogelijk om de omgekeerde weg te bewandelen. Men hoeft slechts de door materialisatie verkregen praktische kern "terug" te idealiseren, om zo weer een stuk van de klassieke theorie terug te krijgen. En nu doet zich iets opmerkelijks voor. In veel gevallen zal men namelijk slechts *een stuk*, inderdaad, van de klassieke theorie terugkrijgen. Reeds in de titel van dit boek staat de stelling dat "de wiskunde zo onwerkelijk" is. Dit kunnen we nu nauwkeuriger formuleren. Doordat de creativiteit van de menselijke geest, lees van de onafhankelijk wiskundige, aan het werk is geweest, daardoor is de wiskunde "verrijkt" met elementen die bij het proces van materialisatie spoorloos verdwijnen. Zulke zaken kunnen daarom niet terugvertaald worden naar dingen in de geïdealiseerde wereld. Dit soort idealen kan niet opnieuw tot leven worden gewekt.

Een program van actie zou nu kunnen bestaan uit het volgende. Zou het mogelijk zijn om met behulp van bepaalde technieken de praktische *onbruikbaarheid* van sommige mathematische theorieën te bewijzen? Wat minder rigoureuus: zou het mogelijk zijn om na te gaan welke *stukken* van een theorie niet erg toepasselijk zijn voor de praktijk? Wel, op grond van

het bovenstaande denk ik dat het antwoord hierop bevestigend moet zijn. Immers, hoe zal het stuk van de theorie heten dat na materialisatie en terug idealiseren weer in de wiskunde is beland? Dat is dan toch het *bruikbare* stuk. Echter, alles wat buiten dit gedeelte valt moet, althans wat de materiële werkelijkheid aangaat, toch als zijnde *onbruikbaar* worden bestempeld? Laat het goed tot u doordringen:

Wij denken dat sommige stukken van de wiskunde voor eeuwig tot onbruikbaarheid zijn gedoemd, en wij geloven dat het zeer wel mogelijk is om er achter te komen welke stukken dat precies zijn.

De stukken namelijk die, in de betekenis van hierboven, helemaal *geen* werkbare representatie hebben in een terug-geïdealiseerde wiskunde.

Waarbij voorzichtigheidshalve weer moet worden opgemerkt dat de kaders van de *huidige* toegepaste wiskunde wel eens te eng zouden kunnen zijn. Ook kan het incidenteel gebeuren dat toepasselijke idealen niet als zodanig worden herkend, vanwege de omstandigheid dat onze technieken daartoe onvoldoende zijn ontwikkeld. We moeten deze bezorgdheid echter ook weer niet overdrijven: de Ideale Wereld blijft ook zonder technisch-wetenschappelijke toepassingen nog wel even voortbestaan. Het overleven van de sterkste Idealen wordt in een proces van evolutie beslecht, en zal zodoende nog wel de nodige tijd in beslag nemen.

Toegepaste wiskunde, dat is een sleutelwoord. Het proces van materialisatie van een stuk ideale wiskunde is bepaald niet iets wat we zelf nog moeten bedenken. In de oude tijd al niet. De einduitkomst van een algebraïsche berekening is een serie afgeronde getallen, en de wetenschap die met zulke getallen omgaat heet de rekenkunde. Dat is nooit anders geweest. Zo ook wordt een konkrete weergave van meetkundige zaken al generaties lang aangetroffen in het werktuigbouwkundig tekenen, dat is op het tekenbord van een constructeur.

Echter, pas sinds de jaren 60 heeft de materiële tak van de wiskunde zich ontwikkeld tot een echt vakgebied. Dit is vrijwel uitsluitend te danken aan één faktor: de opkomst van de computer. Eerst dank zij de komst van digitale machines kon de wiskunde serieus gaan denken, eindelijk, aan de ontwikkeling van een *praktijk*. Men kan zelfs met enige overdrijving stellen dat pas in onze moderne tijd de wiskunde geworden is tot een echte *wetenschap*, voorzien namelijk van de geëigende experimentele middelen, precies zoals dat in de natuurkunde het geval is. De "experimentele" tak van de wiskunde staat heden ten dage bekend onder de naam *Informatica* of Toegepaste Wiskunde. Inmiddels wordt ons dus een handige term aangereikt om het gematerialiseerde deel, van een stuk ideale wiskunde, van een algemene aanduiding te voorzien. We noemen dat deel voortaan, ook al is het soms niet de gewoonte: "toegepast".

Het verst ontwikkeld is ongetwijfeld de toegepaste algebra. Reeds in de

jaren 60 vond de toegepaste algebra een onnavolgbare, sindsdien dus vaak nagevolgde uitdrukking in FORMulaTRANslator, ofwel de programmeertaal Fortran. In één klap werden een groot aantal praktische problemen opgelost, zoals het rekenen met gehele (integer) en drijvende komma (floating point) representaties van getallen, het adresseren van abstracte variabelen, het omzetten van formules (infix naar postfix). Provisorischer waren de voorzieningen die de structuur van het programma als geheel bepalen: (conditionele) sprongen en herhalingen (loops). Toen ik voor het eerst machinetaal bestudeerde (de "1802" processor), viel het me op, of beter: viel het me tegen, hoe weinig de globale structuren in de zogenaamde hogere programmeertalen feitelijk afwijken van de primitieve machinetaal.

Inmiddels heeft ook de klassieke meetkunde zich gematerialiseerd in Informatica toepassingen die zeer ver ontwikkeld zijn: dat is het vakgebied van de Computer Grafiek (Computer Graphics). Ik ben dank zij mijn werk bij het Rekencentrum van de T.U. Delft in de gelegenheid geweest om uitgebreid kennis te nemen van veel vordering op dit gebied. In dit verband wordt volstaan met een enkel voorbeeld.

Klassiek, en eigenlijk al wat ouderwets, is het "clipping" probleem. Dit is het verschijnsel dat een lijn in de ideale meetkunde wel oneindig lang kan wezen, maar bij weergave op een blad papier of op een beeldscherm vanzelfsprekend moet vallen binnen de kaders van het medium in kwestie. "Afknippen" van meetkundige figuren op de rand blijkt nu een niet-triviaal probleem op te leveren waar in de oertijd van de ComputerGrafiek het nodige over te doen is geweest.

Problemen doen zich ook voor bij het weergeven van "rechte" lijnen op plotters waarvan de motor slechts in een beperkt aantal richtingen stappen kan nemen, of op beeldschermen, die nu eenmaal voorzien zijn van een eindig aantal "pixels" (beeld-elementen of "picture-elements").

Overigens heeft het vakgebied der ComputerGrafiek zich ontwikkeld tot een wetenschap waarin een stevige consensus is bereikt, van een zodanig hoog niveau dat iemand als ik daar nauwelijks meer dan een incidentele bijdrage aan kan toevoegen.

In de moderne tijd vinden er honderden processen van "materialisatie" tegelijk plaats. Bijvoorbeeld ook als er een computerprogramma moet worden geschreven, aan de hand van een mathematisch model. Het vakgebied wat zich, wat de analyse betreft, met dergelijke materialisaties bezig houdt maakt eveneens integraal deel uit van de (Toegepaste) Wiskunde: het is de *Numerieke Wiskunde*, ook wel Toegepaste Analyse genoemd. Wisten we niets wezenlijks bij te dragen aan de ComputerGrafiek, over de (veel oudere) Numerieke Wiskunde, en het verband met de klassieke analyse, komen we nog uitgebreid te spreken.

1.11 Samenvatting

0. De exaktheid van de wiskunde is natuurlijk, maar niet vanzelfsprekend, zo blijkt uit de geschiedenis.

1. Wiskunde is niet in de eerste plaats ontsproten aan een "kreatieve oer-intuïtie", maar voortgekomen uit praktische maatschappelijke behoeften en omstandigheden.

2. Een aanschouwelijke voorstelling van meetkundige zaken kan slechts op grond van een zeer bepaalde filosofische overtuiging als minderwaardig of misleidend worden aangemerkt.

3. Men heeft de intrinsieke onnauwkeurigheid van praktische meet- en rekenkunde aanvankelijk niet als een onvolkomenheid opgevat.

4. De algebra dankt haar huidige exakte karakter grotendeels aan de idealisatie die van de meetkunde is uitgegaan. Het numerieke rekenen zou op zich geen aanleiding hebben gegeven tot een dergelijke absolute nauwkeurigheid.

5. Moeilijkheden met irrationale getallen kunnen niet optreden in een primitieve praktische meetkunde. Zij zijn louter het gevolg van een idealistische opvatting van deze meetkunde en de onvermijdelijke doorwerking daarvan in de algebra.

6. Vanuit een modern standpunt zijn meetinstrumenten min of meer zelfstandige wezens die ook zonder menselijke tussenkomst het vermogen bezitten om waarnemingen te verrichten en te verwerken.

7. Meten is een zuivere vorm van abstraheren: er vindt geen idealisatie plaats. Een meetinstrument is het voorbeeld bij uitstek van een zuiver abstraktie-mechanisme.

8. De exaktheid van natuurwetten kan alleen maar van idealistisch mathematische aard zijn. In de (experimentele) fysica is er geen enkele wetenschappelijke basis voor te vinden.

9. Puur mathematische uitgangspunten zouden bij toepassing per ongeluk wel eens kunnen veranderen in puur fysische uitgangspunten.

10. De natuur gehoorzaamt niet aan wiskundige, doch de wiskunde gehoorzaamt aan natuurlijke wetten, natuurwetten namelijk die bepalen hoe een evolutie in zijn werk gaat.

11. Dat door Plato's idealistische opvattingen de wiskunde meer los is komen te staan van de praktijk, is alleszins begrijpelijk maar niet zonder meer "logisch".

12. Men kan niet ergens tussen de natuurwetten een grens trekken en zeggen: aan deze kant is alles exakt, en aan die kant is alles een benadering.

13. De filosofie van het mathematische model is *de* manier bij uitstek om te ontkomen aan het permanent sluimerende konflikt tussen de theoretische wiskunde en de praktische toepassing.

14. Sommige stukken van de wiskunde zijn voor eeuwig gedoemd tot onbruikbaarheid, en het is zeker mogelijk om er achter te komen welke stukken dat precies zijn.

15. Dank zij de opkomst van de digitale computer heeft de wiskunde zich kunnen transformeren tot een volwaardige empirische wetenschap.

1.12 Aantekeningen

0. Aangezien op de werkelijkheid geen andere theorieën van toepassing zijn dan fysische, zou het grondslagen-onderzoek van de wiskunde met voordeel door fysici gedaan kunnen worden.

1. De volgende uitspraak is van Poincaré: "De wiskunde is even materieel als de sterrenkunde of de plantkunde".

2. Abstraktie van een reëel getal leidt tot een eindig aantal decimalen. Idealisatie van een reëel getal leidt tot een oneindig aantal decimalen.

3. Een exakte definitie van het begrip onnauwkeurigheid - met behulp van de statistiek of anderszins - is een contradictio in terminis.

4. Ook de analytische, "exakte" oplossing van een probleem wordt uiteindelijk gerepresenteerd door een eindige reeks afgeronde getallen.

5. In de klassieke "exakte" mechanica is beweging, strikt genomen, onmogelijk. Dit is de aloude paradox van de pijl die niet kan vliegen.

6. Volgt een kleine anekdote. Ergens in de jaren zestig werd in Eindhoven een discussie-bijeenkomst belegd met als modieus thema "vervreemding". Men had een aantal geleerde heren uitgenodigd, waaronder een logisch-positivist. Deze presteerde het om de hele vergadering pas op de plaats te laten maken bij de vraag wat dan wel de exakte definitie zou zijn van het woord "vervreemding". Na een of twee uur vruchteloos debat stapte een zeker iemand naar de mikrofoon, teneinde deze filosoof de volgende gelijkenis voor te houden: "Durft u ook niet in een auto te stappen, alvorens men u een exakte definitie heeft gegeven van de motor?" De zaal was te murw om nog te applaudiseren.

7. In de natuur wordt zo veel aandacht geschonken aan uiterlijk vertoon en fysieke schoonheid, dat in het algemeen iets meer aandacht voor het *lichamelijke* aspekt van de menselijke evolutie niet misplaatst zou zijn.

8. Van een bewustzijn zonder een lichaam kun je niet spreken.

9. Niet alleen idealisaties, maar ook abstrakties, of konkreter: laboratorium situaties zijn, in plaats van het doorgronden van de werkelijkheid, eerder een manier om haar in eerste instantie *niet* te doen kennen.

Bruno Latour [14] haalt het voorbeeld aan van Louis Pasteur, die een glazen kolf voorzag van een voedingsbodem, de inhoud kookte en vervolgens een dusdanig lange en dunne glazen hals aan de kolf blies dat microben niet

konden binnendringen. De voedingsbodem in de kolf was dus steriel. Maar dat was voor die tijd een buitengewoon gekunstelde, onnatuurlijke situatie, feitelijk geheel en al in *in strijd* met de werkelijkheid.

Hoofdstuk 2

CONSTRUCTIVISME

Het wordt de hoogste tijd een echte wiskundige, uitgebreid, aan het woord te laten. We gaan verder met de (vrije) vertaling van een aantal Engelstalige artikelen, geschreven door een respectabel Duits mathematicus: Gerhard Gentzen [15]. Beter dan ik het zelf zou kunnen, verhaalt hij over recentere ontwikkelingen binnen de wiskunde. Het gaat om de eerste helft van de 20ste eeuw.

De titel van het eerste artikel is: "Het oneindigheidsbegrip in de wiskunde", en is vrijwel integraal opgenomen. Het tweede draagt als titel: "De huidige stand van het onderzoek naar de grondslagen van de wiskunde". Verschillende gedeelten hiervan zijn weggelaten of vervangen, deels om allerlei herhalingen te vermijden, deels vanwege elementen in het oorspronkelijke artikel die in het onderhavige verband als storend worden ervaren. Gentzen's betoog bereikt een climax in het hoofdstuk getiteld: "De mogelijkheid om de verschillende gezichtspunten met elkaar te verzoenen". Aan het woord is Gerhard Gentzen:

2.1 Het oneindige

De grote controverse, die de laatste decennia is opgelaaid in verband met de grondslagen van de wiskunde, is eerst en vooral een controverse over de aard van het oneindige in de wiskunde. In wat volgt zal ik proberen te kenschetsen, op een wijze die technische details zoveel mogelijk achterwege laat, om welke problemen het hier precies gaat.

Laat ik eerst geven een *onderverdeling van de wiskunde*, in drie onderscheiden niveaus, overeenkomstig de mate waarin het begrip "oneindig" wordt gebruikt in de verschillende takken van de wiskunde.

Het eerste en laagste niveau wordt vertegenwoordigd door de elementaire getaltheorie, dat is: door de theorie der getallen voorzover zij geen gebruik maakt van technieken uit de analyse. Het oneindige komt hier voor in zijn simpelste vorm. Het gaat om een oneindige reeks van objecten, in dit geval de natuurlijke getallen. Verscheidene andere takken van de wiskunde zijn logisch gelijkwaardig met de elementaire getaltheorie, te weten alle theorieën die één-op-één in overeenstemming kunnen worden gebracht met de natuurlijke getallen, en die dan ook "aftelbaar" heten. Bijna de gehele algebra hoort hier thuis - de rationale getallen, de algebraïsche getallen, en ook de polynomen, waar tenslotte van kan worden bewezen dat ze aftelbaar zijn - verder de kombinatorische topologie, bijvoorbeeld en met name het deel van de topologie dat zich alleen bezig houdt met objecten waarvan de eigenschappen beschreven kunnen worden met behulp van eindig veel gegevens. Het welbekende vierkleuren probleem hoort hier thuis. Al deze theorieën zijn, logisch gesproken, volkomen gelijkwaardig. Het is dan ook voldoende om zich uitsluitend met elementaire getaltheorie bezig te houden; de stellingen en bewijzen in de overige theorieën kunnen worden opgevat als getaltheoretische stellingen en bewijzen, doordat er een verband is tussen de objecten van deze theorieën en de natuurlijke getallen. Met het vierkleuren probleem bijvoorbeeld komt inderdaad een equivalent getaltheoretisch probleem overeen, hoewel onze bijzondere belangstelling hiervoor natuurlijk enkel valt af te leiden uit de topologische formulering die zo aanspreekt.

Het tweede niveau van de wiskunde wordt vertegenwoordigd door de *analyse*. Voorzover betreft de toepassing van het oneindigheidsbegrip, is de wezenlijk nieuwe karakteristiek het feit dat nu zelfs de *afzonderlijke objecten* van de theorie op zichzelf weer oneindige verzamelingen kunnen zijn. De reële getallen, dat zijn de objecten van de analyse, worden tenslotte gedefinieerd als oneindige verzamelingen, in de regel als oneindige reeksen van rationale getallen. In dit verband maakt het geen verschil of de bijzondere definitie welke gekozen wordt gebruik maakt van geneste intervallen, Dedekindse sneden, of van een andere manier. De gehele theorie der complexe funkties behoort ook tot dit niveau; er wordt hier niets toegevoegd wat wezenlijk nieuw is.

Het derde niveau van toepassing van het oneindigheidsbegrip, tenslotte, komen we tegen in de algemene verzamelingenleer. Hier worden als objecten toegelaten niet alleen de natuurlijke getallen en andere grootheden die op eindige wijze te beschrijven zijn, zoals op het eerste niveau, of ook oneindige verzamelingen van deze, zoals op het tweede niveau, maar bovendien oneindige verzamelingen van oneindige verzamelingen en wederom verzamelingen van zulke verzamelingen, enzovoort, in de uiterste algemeenheid die maar te bevatten is.

De gegeven onderverdeling omvat elke tak van de wiskunde. Voorzover betreft de meetkunde, bijvoorbeeld, is het zo dat daarvanuit vandaag de dag niet langer bijzondere problemen naar voren komen in verband met het oneindigheidsbegrip. Lijkt het erop dat zulke problemen zich toch voordoen, dan behoren ze ofwel tot de natuurkunde of ze komen in een gelijkwaardige vorm voor in de analyse; de verschillende meetkundes kunnen tenslotte altijd geïnterpreteerd worden in termen van logisch gelijkwaardige modellen uit de analyse.

Er zijn in wezen twee fundamenteel verschillende interpretaties van de aard van het oneindige in de wiskunde, en ik zal nu verder gaan met deze te omschrijven. Ik zal ze noemen de 'actualistische' interpretatie en de 'constructivistische' interpretatie van het oneindige. De eerste is de interpretatie van de klassieke wiskunde zoals we die allemaal hebben geleerd aan de universiteit. Verscheidene wiskundigen hebben de constructivistische zienswijze overgenomen - hoewel niet altijd in even ruime mate - onder hen Kronecker, Poincare, Brouwer en Weyl. Deze namen alleen al geven aan dat we te maken hebben met een denkrichting die inderdaad serieus moet worden genomen. Ik zal proberen tot uitdrukking te brengen wat de essentie is van de constructivistische zienswijze vis-a-vis de actualistische interpretatie; in de korte tijd die ons ter beschikking staat kan dit slechts op onvolkomen wijze worden gedaan, in het bijzonder omdat men in gedachten moet houden dat de actualistische interpretatie, louter en alleen omdat we daar zo mee vertrouwd zijn, een tweede natuur van ons geworden is en het is niet gemakkelijk om, al is het maar voor even, te wennen aan een nogal andere manier van denken.

Ik zal beginnen met de paradoxen van de verzamelingenleer. Hier hebben we een situatie waarin actualistische beschouwingen hebben geleid tot een ongerijmdheid die niet het gevolg had kunnen zijn van de constructivistische interpretatie van de materie. Want op basis van het heel algemene begrip van een verzameling, zoals eerder aangeduid, is het ook mogelijk om bijvoorbeeld het begrip van de "verzameling van alle verzamelingen" te vormen; hetgeen een welgedefinieerde verzameling is. Toch komen hieruit tegenspraken voort, hetgeen alleszins te begrijpen is: De verzameling van alle verzamelingen moet tenslotte zichzelf bevatten als een element en in zekere zin - hetgeen gemakkelijk precies gemaakt kan worden - moet deze verzameling daarom groter zijn dan zichzelf, en het is duidelijk dat dit niet zo kan zijn. Bij nauwkeuriger onderzoek treedt vlot aan de dag hoe de ongerijmdheid zich voordoet: Strikt genomen moet de "verzameling van alle verzamelingen" niet zelf worden beschouwd als een soort verzameling; het is een daarop volgend maaksel, als het ware, en dat brengt voort een geheel nieuwe samenvoeging vanuit een gegeven totaliteit van verzamelingen. Dit is in feite de constructivistische kijk op de situatie: Nieuwe verzamelin-

gen kunnen, in beginsel, slechts worden gevormd op constructieve wijze, een voor een, op grond van alreeds gevormde verzamelingen. Volgens de actualistische zienswijze, aan de andere kant, zijn alle verzamelingen bij voorbaat gedefinieerd door het abstrakte begrip verzameling en zijn daarvoor reeds beschikbaar 'als zodanig', geheel onafhankelijk van de vraag hoe individuele verzamelingen daaruit kunnen worden geselecteerd door middel van bijzondere constructies. Het is deze visie welke aanleiding gaf tot de paradox.

Als we zouden moeten proberen het wezen van de constructivistische zienswijze in een zo algemeen mogelijk beginsel uit te drukken, dan zouden we het ongeveer als volgt formuleren: 'Iets oneindigs moet nooit worden beschouwd als voltooid, maar slechts als iets in wording, iets wat op constructieve wijze steeds verder kan worden opgebouwd.' Ik herinner aan de welbekende uitspraak van Gauss dat 'het gebruik van een oneindige grootte als iets voltooids nimmer kan worden toegestaan in de wiskunde'.

Als dit beginsel van het interpreteren van het oneindige in constructieve zin aanvaard wordt, dan openbaren verschillen vis-a-vis de actualistische opvatting van de klassieke wiskunde zich niet alleen in de verzamelingenleer, doch reeds in het bereik van de elementaire getaltheorie. Ik zal nu deze verschillen in meer detail ter sprake brengen. In de elementaire getaltheorie komen we het oneindige slechts tegen in zijn eenvoudigste vorm, te weten in de vorm van de oneindige reeks der natuurlijke getallen. Volgens de actualistische opvatting mogen we deze reeks beschouwen als een voltooide oneindige totaliteit, terwijl de constructivistische opvatting ons enkel toestaat te zeggen: We *kunnen* steeds verder voortgaan in de getallenreeks en altijd nieuwe getallen bijmaken, maar we moeten niet spreken over een voltooide totaliteit. Een uitspraak als 'alle natuurlijke getallen hebben de eigenschap B ', bijvoorbeeld, heeft in elk van de gevallen een ietwat andere betekenis. Volgens de actualistische interpretatie wordt er gezegd: De eigenschap B gaat op voor ieder getal dat op de een of andere manier afgezonderd wordt uit de voltooide totaliteit der getallen. Volgens de constructivistische opvatting kunnen we alleen zeggen: Ongeacht hoever we doorgaan met het vormen van nieuwe getallen, de eigenschap B blijft geldig voor deze nieuwe getallen.

In de praktijk doet dit verschil in interpretatie hier echter niet ter zake. Een uitspraak over alle natuurlijke getallen wordt gewoonlijk bewezen door volledige inductie, en deze wijze van redeneren lijkt zeker ook in harmonie met de constructivistische opvatting; in het bijzonder omdat de volledige inductie uiteindelijk gegrond is op het idee van ons voortschrijden in de getallenreeks. De situatie ligt anders in het geval van existentiële uitspraken. De uitspraak 'er bestaat een natuurlijk getal met de eigenschap B ' zegt, overeenkomstig de actualistische interpretatie: 'Ergens in de voltooide to-

taliteit van getallen komt zo'n getal voor'. Volgens de constructivistische interpretatie is zo'n bewering natuurlijk zinloos. Hetgeen niet betekent dat onder deze interpretatie existentiële uitspraken meteen moeten worden verworpen. Als een bepaald getal n , waarvoor de eigenschap B opgaat, inderdaad ook nader kan worden bepaald, dan kunnen we zelfs onder deze interpretatie spreken van de existentie van zo'n getal; in werkelijkheid verwijst de existentiële uitspraak nu niet langer naar de oneindige totaliteit der getallen; het zou immers voldoende zijn om alleen te spreken over de getallen van 1 tot n . De existentiebewijzen welke in de praktijk voorkomen zijn inderdaad meestal van dien aard dat een echt voorbeeld kan worden gegeven. Echter, er zijn ook bewijzen mogelijk waarbij dat niet het geval is, te weten *indirekte existentie bewijzen*: Er wordt aangenomen dat er geen getal bestaat waarvoor eigenschap B geldt. Wanneer deze aanname leidt tot een tegenspraak, dan wordt beredeneerd dat een getal waarvoor eigenschap B geldt uiteindelijk toch bestaat. Het kan dan gebeuren dat een effectieve procedure om metterdaad zo'n getal aan te maken helemaal niet voorhanden is. Vanuit het gezichtspunt van de constructivist moet een dergelijk bewijs om die reden worden verworpen. Een andere bewijstechniek welke op soortgelijke wijze onaanvaardbaar wordt vanuit dit gezichtspunt en welke gewoonlijk in hetzelfde verband wordt aangehaald is de toepassing van de 'wet van de uitgesloten derde' op uitspraken over oneindig veel objecten. Volgens de constructivistische interpretatie kunnen we bijvoorbeeld zelfs niet zeggen: Een eigenschap B gaat wel op voor alle natuurlijke getallen of hij gaat niet op voor alle natuurlijke getallen. De verwerping van de wet van de uitgesloten derde lijkt bijzonder paradoxaal, op het eerste gezicht, maar is slechts een noodzakelijk gevolg van het beginsel dat het oneindige als mogelijk wordt opgevat. Uiteindelijk is deze wet gegrond op het idee van de voltooide getallenreeks. Dit moet niet zo worden opgevat alsof het betekent dat de constructivisten genoemde wet beschouwen als helemaal onwaar; vanuit hun gezichtspunt is het juist de wet te beschouwen als zijnde *zonder betekenis*. Het heeft dus hoe dan ook geen zin om zelfs maar te spreken over de totaliteit der getallen als iets wat voltooid is, precies omdat 'in werkelijkheid' de getallenreeks nooit voltooid is, het enige gegeven een onbepaald uitbreidbaar proces van voortschrijden is.

In de praktijk komen deze redeneervormen, welke niet toegestaan zijn volgens de constructivistische opvatting, nauwelijks voor in de elementaire getaltheorie. De situatie is anders in de analyse en de verzamelingtheorie. Hier zijn weliswaar de verschillen tussen de twee interpretaties in wezen hetzelfde als beschreven voor de natuurlijke getallen; ik zal ze daarom niet verder ter sprake brengen. Echter, in het geval van de analyse en de verzamelingenleer is de gewichtigheid van het verschil aanzienlijk groter, met als gevolg dat vanuit het gezichtspunt van de constructivist over uitgebreide gedeelten van

de analyse en over bijna alles van de verzamelingenleer het onaanvaardbaar moet worden uitgesproken.

In dit verband moet de aandacht worden gevestigd op het feit dat in bepaalde grensgevallen niet ondubbelzinnig kan worden gedefinieerd hoe de scheidslijn loopt tussen wat constructief aanvaardbaar is en wat niet. Het is bovendien zo dat de opvattingen van de verschillende wiskundigen die het constructivistische gezichtspunt aanhangen niet identiek zijn. Ondanks dat zijn de verschillen niet belangrijk genoeg voor het beeld als geheel om meer gedetailleerde bespreking te rechtvaardigen. Woorden als 'intuitionist' (Brouwer) en 'finitist' (Hilbert) duiden zulke enigszins verschillende constructivistische gezichtspunten aan.

Nu is de voornaamste vraag deze: Welke van de twee interpretaties is in feite de juiste? Beide worden verdedigd. Aan de ene kant hebben we de intuitionisten, onder leiding van Brouwer, met de volledig radikale stelling dat alle wiskunde die onverenigbaar is met de constructivistische zienswijze verworpen dient te worden. Aan de andere kant is de meerderheid der wiskundigen begrijpelijkerwijs terughoudend om zulk een offer te brengen. De paradoxen, zo zeggen zij, mogen weliswaar gegrond zijn op de ontoelaatbare vorming van begrippen; maar zulke begrippen kunnen vermeden worden door een gepaste afbakening; de gehele analyse en a fortiori de getaltheorie, zo houden ze vol, is compleet onaanvechtbaar. Ongelukkigerwijs kan de afbakening van de ontoelaatbare redeneervormen worden uitgevoerd op wezenlijk verschillende manieren zonder dat men noodzakelijkerwijs uitkomt op een bepaald gemeenschappelijk punt, en ik moet zeggen dat voor mij de helderste en meest consequente afbakening lijkt te zijn datgene wat voortvloeit uit het beginsel dat het oneindige constructief dient te worden geïnterpreteerd.

Niettemin moeten we terughoudend zijn om het veelomvattende niet-constructieve gedeelte van de analyse te verwerpen, een gedeelte dat, om maar wat te noemen, stellig de proef heeft doorstaan in een bonte verscheidenheid van natuurkundige toepassingen.

2.1.1 Onderbreking

Gentzen vervolgt met een betoog dat voor ons doel niet relevant is, en waar we ons bovendien niet mee kunnen verenigen. Het gaat om toepassing van zogenaamde "transfinitie inductie" in het kader van consistentiebewijzen. Persoonlijk ben ik van mening dat op dat punt in het artikel een anticlimax wordt ingezet: het kan natuurlijk niet zo zijn dat artefacten, welke niet geoorloofd zijn binnen de theorie der natuurlijke getallen, als middel zouden kunnen worden aangewend om iets te bewijzen buiten de theorie om, terwijl het om dezelfde theorie gaat. Dat is toch meten met twee maten. We

gaan verder met het tweede artikel. Wederom is Gerhard Gentzen aan het woord:

2.2 De analyse

In dit en het volgende hoofdstuk zal ik nader onderzoeken de verschillen tussen de actualistische interpretatie en de constructivistische interpretatie van de analyse. De analyse is de belangrijkste tak van de praktische wiskunde. In dit hoofdstuk zal ik in het bijzonder tegenover elkaar stellen de twee benaderingen tot de definitie van reële getallen en reële functies. Verder zal ik, in het volgende hoofdstuk, een voorstel doen *om de onderscheiden gezichtspunten mogelijk met elkaar te verzoenen*.

Het begrip van een irrationaal getal kan, zoals bekend, ruwweg als volgt worden verkregen: Het interval van 0 tot 1 wordt verdeeld in twee stukken, ieder stuk weer in twee stukken, enzovoort; op deze wijze worden opdelingen verkregen die alsmaar fijner worden. Een reeks van zulke intervallen, waarin iedere term deel uitmaakt van de eraan voorafgaande term, heeft de neiging steeds meer samen te trekken tot een punt naarmate het proces wordt voortgezet. Dit is de plek waar de actualisten de sprong wagen in de klasse der voltooide oneindigheden, door te verklaren dat een oneindig lange reeks van deze soort een "reëel getal" is.

Deze interpretatie leidt tot een paar ongewone konsekwenties. Afgezien van de algemene betwistbaarheid van de actualistische interpretatie welke voortkomt uit de paradoxen, zouden die naar voren gebracht kunnen worden als aanvullende argumenten tegen deze zienswijze: Aan de ene kant kan op de gebruikelijke wijze bewezen worden dat deze reële getallen een onaftelbare verzameling vormen. Aan de andere kant is het echter zo dat alle stellingen, alle definities en alle bewijzen die ooit kunnen worden geformuleerd of uitgevoerd aftelbaar zijn; ze kunnen immers altijd worden gekenmerkt door eindig veel symbolen. Dit leidt tot de konklusie dat er reële getallen zijn die op geen enkele manier afzonderlijk gedefinieerd kunnen worden, dat er geldige stellingen zijn die niet uitgesproken kunnen worden en die niemand ooit zal kunnen bewijzen. Als er een beroep wordt gedaan op de relativiteitsstelling van Skolem, dan volgt verder dat de gehele conventionele analyse in al zijn geledingen geldig blijft wanneer zij wordt geïnterpreteerd in een zeker aftelbaar model.

Op dit punt zouden we best in de verleiding kunnen komen om te zeggen: Als 'het onaftelbare continuüm' er op deze manier in slaagt om ons begrip volkomen te boven te gaan, heeft het dan hoe dan ook nut om erover te spreken als iets wat "reëel" is? Op het laatst zal ik laten zien hoe, in een beperkte betekenis, wij niettemin deze vraag bevestigend kunnen beantwo-

orden.

Allereerst zal worden onderzocht wat de constructivistische zienswijze te bieden heeft als *vervanging* voor het actualistische begrip van irrationale getallen.

De reeks van in stukken verdelen van intervallen kan begonnen worden als eerst. Het besef van de *voltooide* reeks van intervallen moet echter worden verworpen als zijnde zonder betekenis. Het oneindige dient tenslotte te worden beschouwd slechts als een *mogelijkheid*, als een uitdrukking voor de onbegrensdsheid van het eindige. We kunnen daarom in alle redelijkheid zeggen: Het is mogelijk om deze opdeling alsmaar verder door te zetten. Echter, op deze manier wordt geen irrationaal getal verkregen; in iedere fase van de opdeling blijven we zitten met een kollektie van eventueel tamelijk naburige, doch *rationale* getallen. Het is in deze zin dat Kronecker volhield: 'er zijn helemaal geen irrationale getallen'. Zelfs een constructivist behoeft echter niet zo bekrompen van geest te zijn; er bestaan mogelijkheden om verder te gaan. Een irrationaal getal kan tenslotte beschouwd worden als zijnde gegeven wanneer er een regel beschikbaar is die toelaat dat de berekening van een reeks intervallen van genoemde soort willekeurig ver wordt voortgezet.

Een dergelijke regel kan gemakkelijk worden opgesteld, bijvoorbeeld voor $\sqrt{2}$, in het algemeen voor $\sqrt[n]{m}$, maar ook voor transcendente getallen zoals π en e , in feite heel algemeen voor praktisch alle getallen die in de analyse nodig zijn als *afzonderlijk gedefinieerde* getallen; te weten in alle gevallen waarin het betreffende getal werkelijk kan worden berekend met iedere gewenste graad van nauwkeurigheid.

Teneinde trouw te blijven aan de constructivistische zienswijze echter, moeten de 'getallen' die op deze manier zijn gedefinieerd met zorg worden gehanteerd. Er moet aan de verleiding worden weerstaan om zo'n getal te beschouwen als een voltooide oneindig lange tweetallige breuk. Wat gegeven is in deze betekenis is niet echt het getal als geheel, maar slechts de regel om het steeds verder te verwezenlijken. De regel zelf is eindig en louter een geschikte voorstelling, in een bepaald zinsverband, van een oneindig lang getal, waarvan gezegd kan worden, nu meer dan ooit, *dat het in werkelijkheid niet echt bestaat*.

In zijn artikel getiteld 'Das Kontinuum' heeft Weyl getracht een analyse op te bouwen op basis van dit soort van getalbegrip. (In zijn artikel heeft Weyl niet volledig uitgebuit al wat volgt uit de constructivistische houding tegenover de natuurlijke getallenreeks, maar dit werd later door hem verbeterd.) Een van de moeilijkheden die rijzen in verband hiermee is te beslissen wat voor technieken toegestaan zouden moeten worden in de berekening en daarmee de definitie van getallen. Aanvankelijk legde Weyl een zekere beperking aan zijn technieken op; gewoonlijk echter wordt door

intuitionisten zo'n beperking helemaal vermeden, een gezichtspunt wat niet geheel en al onterecht is, want een algemeen geldige beperking roept fundamentele moeilijkheden op, analoog aan die welke bestaan voor beperkte axioma en afleiding systemen. Zulke beperkingen hebben namelijk altijd een opening naar verdere uitbreidingen en hebben die ook altijd nodig. Dit stelt in feite geen ernstige tekortkoming voor; in gevallen van onmiddellijk praktisch belang is het volmaakt duidelijk hoe het begrip 'berekenbaarheid' wordt bedoeld.

Het was Alonzo Church [16] die zijn begrip van berekenbaarheid nader preciseerde. Onafhankelijk van Church, formuleerde Turing een equivalent begrip, en paste het in het bijzonder ook toe op de berekenbaarheid van reële getallen. De grotere nauwkeurigheid bestaat in de formulering van een omvattend begrip dat alle 'rekenprocedures' in zich verenigt. Dit maakt een onmogelijkheidsbewijs uitvoerbaar. Echter, zelfs op dit peil van nauwkeurigheid kan niet van iedere procedure die onder dit begrip valt, worden uitgemaakt of het een 'reken' procedure is of niet.

Een uitbreiding van het constructivistische begrip van een reëel getal werd bedacht door Brouwer met zijn 'vrije keuze rijen'. Deze zijn de logische uitkomst van een poging om het begrip van een functie van reële getallen in te voeren. In de actualistische wiskunde wordt dit begrip, zoals bekend, eenvoudig gedefinieerd als een relatie die aan ieder willekeurig reëel getal een ander reëel getal toevoegt als de functiewaarde ervan. Het begrip van een voltooid oneindig is hier drievoudig in betrokken: ten eerste in twee reële getallen, ten tweede in het universele abstrakte 'toevoegen'. Dit begrip is daarom voor de constructivist van geen nut. Een van de wegen die voor hem open staat is een functie te definiëren als een regel waardoor aan iedere regel die een reëel getal definieert een tweede regel die een ander reëel getal definieert wordt toegevoegd. Het is echter gemakkelijk in te zien dat de volgende minder strikte versie, die dichter bij het actualistische functiebegrip staat, nog steeds volledig te verenigen is met constructivistische principes. In plaats van het begrip van een afzonderlijk reëel getal gegeven door een regel, wordt de werkwijze van het opdelen van intervallen wederom als uitgangspunt genomen, door een functie nu juist te definiëren als een regel met de volgende eigenschappen. Als de rij van intervallen, van de hierboven beschreven soort, op een of andere manier gekozen is, dan voegt de functie-regel aan een zeker beginsegment van deze rij een eerste interval toe van de 'functiewaarde', en nadat de rij is voortgezet tot op een zeker punt verderop, een tweede segment, enzovoort. De toegevoegde intervallen worden dus wederom zodanig ontworpen dat zij een 'nest van intervallen' vormen. - In het kort: In elk van de gevallen moet de functiewaarde door de funktieregel te berekenen zijn tot op een gewenst eindig aantal begindecimalen, uitgaande van een voldoende groot aantal begindecimalen van

de waarde van het argument.

Dat dit funktiebegrip nog steeds aanzienlijk nauwer is dat het actualistische kan reeds worden afgelezen uit het feit dat een dergelijke 'functie' altijd een *continue* functie is. Brouwer bewijst bovendien de uniforme continuïteit van deze functies, en terwijl hij dat doet maakt hij tamelijk uitgebreid gebruik, voor een constructivist, van 'transfinitie inductie'.

De argumentwaarden die in verband met dit funktiebegrip voorkomen zijn wat Brouwer noemt 'vrije keuze rijen', te weten: rijen van intervallen waarin opeenvolgende termen in elk geval vrijelijk kunnen worden gekozen - alleen onderworpen aan de beperking opgelegd door de fundamentele voorwaarden voor geneste intervallen.

Zelfs dit getalbegrip moet met voorzichtigheid worden behandeld; het heeft echt geen onafhankelijke betekenis, maar alleen een betekenis in een geëigend zinsverband. Tenslotte is het begrip van een voltooide oneindige rij nog steeds geheel en al zonder betekenis; vrije keuze rijen kunnen dus alleen gebruikt worden in zinsverbanden waarin het gaat om een eindig beginsegment ervan, of ten hoogste de mogelijkheid van een willekeurige uitbreiding ervan. Dit is zeker zo in het geval van de opgegeven definitie van een functie.

Door middel van het funktiebegrip van Brouwer kunnen nu zonder moeilijkheden constructivistische definities gegeven worden voor de meest frequent gebruikte functies in de analyse. De meeste ervan zijn tenslotte zo dat de funktiewaarden ervan des te nauwkeuriger berekend kunnen worden naarmate de argumentwaarde steeds verder wordt ingeperkt.

Aanzienlijke verschillen tussen de intuïtionistische en de klassieke analyse openbaren zich niettemin in de verdere ontwikkeling van de theorie, met name in verband met existentie stellingen, zoals reeds vermeld het vorige hoofdstuk. Constructivisten moeten tenslotte volhouden dat een rekenregel gespecificeerd wordt voor het getal waarvan beweerd wordt dat het bestaat; actualistische existentie bewijzen voldoen vaak niet aan deze eis.

Intuïtionistische analyse wordt dus *veel ingewikkelder* dan klassieke analyse. Dit moge reeds opgevallen zijn in verband met de definities van de fundamentele begrippen. Constructivisten vragen bijvoorbeeld om verschillende begrippen van reële getallen voor verschillend gebruik, terwijl een enkel eenvoudig begrip volstaat in de actualistische analyse.

2.2.1 Onderbreking

Gentzen vervolgt zijn betoog wederom met een voor ons doel niet zozeer ter zake doend pleidooi voor een constructivistisch consistentie bewijs van de klassieke analyse. Een bewijs dat overigens tot op de dag van vandaag

niet geleverd is. We gaan verder met het derde artikel. Aan het woord is, voor de laatste keer, Gerhard Gentzen:

2.3 Poging tot verzoening

Ik ben het volgende van mening. Stel dat eenmaal het consistentie bewijs van de analyse met goed gevolg is uitgevoerd. Dan zou er geen hinderpaal meer in de weg moeten staan om te komen tot een overeenkomst tussen de vertegenwoordigers van de verschillende stromingen - tussen de constructivisten of intuïtionisten aan de ene kant, en de aanhangers van Hilbert, alsmede de vertegenwoordigers van een zuiver actualistische interpretatie aan de andere kant - namelijk om de klassieke analyse in zijn bestaande vorm te behouden. Tegenwoordig echter is de toestand zodanig dat de radikale constructivisten het niet eens zijn met deze konklusie, en hier openbaart zich het feitelijke fundamentele meningsverschil tussen Brouwer en Hilbert. Dat wil zeggen, de intuïtionisten beschouwen alle wiskundige stellingen die gegrond zijn op de actualistische interpretatie van het oneindige als zinledig en alle vormen van redeneren die ermee gepaard gaan als de bestanddelen van een nutteloos spel met symbolen zonder betekenis.

In de voorgaande hoofdstukken heb ik verscheidene feiten vermeld die enige steun verlenen aan de laatste zienswijze. Aan de andere kant vormt de enorme rijkdom aan succesvolle toepassingen van de klassieke analyse in de fysica, om slechts een kant van de zaak te noemen die van het grootste belang is, een zwaarwegend argument tegen deze konklusie. In wat volgt zal ik proberen duidelijk te maken hoe iemand, zelfs terwijl hij de fundamentele thesis van het constructivisme onderschrijft, toch tot de konklusie kan komen dat de actualistische analyse dient te worden behouden en voortgezet.

Hilbert zelf heeft hier de weg gewezen, namelijk via de methode der *ideale elementen*.

Dat wil zeggen: beweringen die over het oneindige een uitspraak doen in de zin van de actualistische interpretatie worden beschouwd als 'ideale beweringen', als beweringen die helemaal niet echt betekenen wat de woorden die erin zitten voorgeven te betekenen, maar die van de grootste waarde kunnen zijn om een theorie af te ronden, de bewijzen ervan te vergemakkelijken, en de formulering van de resultaten meer recht toe recht aan te laten zijn. In de projectieve meetkunde bijvoorbeeld worden om dezelfde reden ideale punten ingevoerd, met het voordeel dat veel stellingen worden vereenvoudigd die anders zouden worden geplaagd door uitzonderingen. We moeten natuurlijk op de koop toe nemen het feit dat in sommige gevallen

de strekking van een stelling niet langer de gebruikelijke is. Er wordt bijvoorbeeld het volgende beweerd: 'Twee rechte lijnen hebben altijd een punt gemeen'. Als de rechte lijnen echter toevallig evenwijdig lopen, dan hebben ze duidelijk geen punt gemeen in de werkelijkheid. De werkwijze is onschadelijk omdat nauwkeurig is gespecificeerd wat in zulke uitzonderingsgevallen moet worden verstaan onder het begrip van een 'punt', dat nu een bredere betekenis heeft.

We zouden nog een ander voorbeeld kunnen beschouwen dat, gezien de verwantschap ervan met de natuurkunde, zelfs nog voor treffender overeenkomsten schijnt te zorgen met betrekking tot de verwantschap tussen constructivistische wiskunde en actualistische wiskunde.

Ik denk aan de gelegenhedspoging om een 'natuurlijke meetkunde' in elkaar te zetten, dat is een meetkunde die beter aansluit bij fysische ervaring dan de gebruikelijke (Euclidische) meetkunde bijvoorbeeld. In deze natuurlijke meetkunde gaat de stelling 'er gaat precies een rechte lijn door twee verschillende punten' alleen op wanneer de punten niet te dicht bij elkaar liggen. Want als ze zeer dicht bij elkaar liggen, dan zie je meteen dat er verscheidene naburige rechte lijnen getrokken kunnen worden door de twee punten. De tekenaar moet rekening houden met zulke overwegingen; in de zuivere meetkunde echter wordt dit niet gedaan omdat hier de punten worden geïdealiseerd. Punten die volgens de ervaring een zekere uitgebreidheid hebben worden vervangen door de ideale 'punten' zonder uitgebreidheid van de theoretische wiskunde, en die bestaan niet in de werkelijkheid. Dat deze werkwijze voordeel oplevert wordt bevestigd door het succes ervan: Het mondt uit in een wiskundige theorie van een veel eenvoudiger en aanzienlijk gelijkmatiger vorm dan die van de natuurlijke meetkunde, waar men voortdurend bedacht moet zijn op onaangename uitzonderingen.

De verhouding tussen de actualistische wiskunde en de constructivistische wiskunde is geheel analoog. Door de actualistische wiskunde wordt bijvoorbeeld het begrip 'existentie' geïdealiseerd door te zeggen: een getal bestaat indien het bestaan ervan kan worden aangetoond door middel van een bewijs waarin de logische afleidingen worden toegepast op voltooid oneindige totaliteiten in dezelfde gedaante als waarin ze geldig zijn voor eindige totaliteiten; geheel en al alsof deze oneindige totaliteiten werkelijk aanwezige grootheden waren. Op deze manier erft het existentiebegrip de voordelen en nadelen van een ideaal element. Het voordeel is, boven alles, dat een aanzienlijke vereenvoudiging en elegantie van de theorie wordt verkregen - immers intuïtionistische bewijzen zijn, zoal vermeld, meestal erg ingewikkeld en worden geplaagd door onaangename uitzonderingen. Het nadeel is echter dat dit ideale begrip van existentie niet langer in dezelfde mate op de fysische werkelijkheid van toepassing is als het constructivistische begrip van existentie bijvoorbeeld.

Laten we bijvoorbeeld beschouwen de vergelijking $a.x = b$ voor reële getallen. Volgens de actualistische interpretatie mag eenvoudigweg het volgende worden gesteld: De vergelijking heeft een wortel, zolang a niet gelijk is aan 0. De intuïtionist echter zegt: De vergelijking heeft een wortel zodra vastgesteld is dat a verschillend is van 0. Echter als we uitgaan van de wijze waarop a wordt gegeven, dan kan het gebeuren dat niet van tevoren gezegd kan worden of a gelijk is aan 0 of dat a verschillend is van 0.

In dit geval blijft de vraag van de existentie van een wortel open. Zeker moet worden toegegeven dat deze interpretatie meer overeenkomt met het standpunt van de fysicus die wellicht de coefficient a moet bepalen uit een experiment dat niet nauwkeurig genoeg is om met zekerheid een verschil tussen a en 0 vast te stellen.

Nu rijst de vraag: Wat voor nut hebben elegante hoeveelheden kennis en bijzonder eenvoudige stellingen als ze niet toepasbaar zijn op de fysische werkelijkheid in letterlijke zin? Zou er in dat geval niet de voorkeur aan gegeven moeten worden een werkwijze over te nemen die bewerkelijker is en die ingewikkelder resultaten voortbrengt, maar die als voordeel heeft dat deze resultaten meteen betekenis krijgen in de werkelijkheid? Het antwoord ligt in het succes van de eerder genoemde werkwijze: kijk weer naar het voorbeeld van de meetkunde. De grote verworvenheden van de wiskunde in de voortgang van natuurkundige kennis komt nu juist voort uit deze methode van het idealiseren van datgene wat fysisch gegeven is, en daardoor het eenvoudiger maken van het onderzoek ervan. Bij iedere toepassing van de algemene resultaten op de werkelijkheid moet de bijzondere status als gevolg van de idealisatie natuurlijk in gedachten worden gehouden en moet een daarmee overeenkomende herinterpretatie worden uitgevoerd. Dit is het terrein waar de toegepaste wiskunde zijn activiteiten ontplooit.

Ter vergelijking citeer ik uit Heyting en Weyl. Heyting, de intuïtionist, zegt op een gegeven moment: 'Vanuit het formalistische standpunt kan het doel van de fysika worden gekenmerkt als het beheersen van de natuur. Als dit doel kan worden bereikt door formele methoden' - door de actualistische wiskunde dus - 'dan is geen enkel argument ertegen houdbaar'. In het geschil tussen Brouwer en Hilbert brengt Weyl als volgt zijn standpunt onder woorden: 'Wanneer men de wiskunde bestudeert vanwege de wiskunde zelf dan zou men Brouwer moeten volgen en zichzelf moeten beperken tot onderscheidbare waarheden waarin het oneindige alleen wordt toegelaten als een open veld van mogelijkheden; er kan geen motief zijn om deze grenzen te overschrijden. In de natuurwetenschappen echter stuit men op een gebied dat hoe dan ook niet langer doordringbaar is door een beroep te doen op zichtbare vanzelfsprekendheid; hier neemt kennis noodzakelijkerwijs een symbolische vorm aan. Om deze reden is het niet langer noodzakelijk, zodra de wiskunde betrokken wordt in het proces van een

theoretische reconstructie van de wereld door de fysica, dat we in staat zijn de wiskunde af te zonderen binnen een gebied van het intuïtief zekere. Op dit hogere vlak, waarvandaan de gehele wetenschap zich voordoet als een eenheid, ben ik het eens met Hilbert'.

Ik heb de indruk dat bepaalde fundamentele intuïtionistische begrippen, b.v. het begrip existentie of het begrip reëel getal, strikt genomen reeds 'ideale elementen' zijn. Maar hier valt over te twisten; het is moeilijk bespreekbaar en ook weer niet zo belangrijk. In ieder geval zou het niet betekenen dat de toepassing van zulke begrippen ook een consistentie bewijs van node heeft; ze worden tenslotte alleen toegepast op zo'n manier dat de precieze constructieve betekenis ervan altijd duidelijk blijft. Hetzelfde geldt voor de 'ideale punten' in de projectieve meetkunde; de zaak ligt anders in het geval van de ideale begrippen van de actualistische wiskunde welke - bezien vanuit het gezichtspunt van de constructivist - in het geheel geen inherente 'betekenis' bevatten, maar die desondanks worden gebruikt alsof zij louter door ze uit te spreken van een betekenis worden voorzien.

Terwijl de constructivisten aan de ene kant dus toegeven dat de actualistische wiskunde een bedoeling heeft, lijkt het aan de andere kant redelijk dat aan het constructivistische gezichtspunt een grotere rol in de wiskunde toebedacht zou moeten worden dan tegenwoordig het geval is. In het grondslagenonderzoek is het reeds de gewoonte om de bewijzen uit te voeren, waar dat maar mogelijk is, langs lijnen die door het constructivisme zijn uitgezet, niet alleen vanwege de grotere onbetwistbaarheid - dit is niet altijd wat met het bewijs wordt beoogd - maar ook vanwege de meer tastbare inhoud van het resultaat. Want het is helder dat een constructivistisch existentie bewijs meer betekent dan een indirekt actualistisch bewijs. In het bijzonder in de elementaire getaltheorie en in het algemeen in theorieën die zich alleen bezig houden met objecten die op eindige wijze beschreven kunnen worden, is het natuurlijk om het constructivistische gezichtspunt als basis te nemen. In het verleden werd dit vrijwel automatisch gedaan in ieder geval; de onvervalst ongekunstelde redenering, waarin helemaal geen bijzondere aandacht wordt besteed aan de methoden van bewijzen, is van nature voornamelijk constructief, dat wil zeggen ze schuwt het oneindige. Bovendien is het zo dat de toepassing van transfiniete actualistische vormen van redeneren in deze gebieden nauwelijks enig praktisch doel dienen. Dit is niet zo in het rijk van het continuüm, in de analyse en de meetkunde. Hier viert de actualistische benadering zijn triomfen; hier is de constructivistische benadering in de praktijk inferieur.

Tot besluit kan daarom worden gezegd: De constructivistische (intuïtionistische, finitistische) wiskunde vormt een belangrijk gebied binnen het geheel van de wiskunde vanwege de grote vanzelfsprekendheid ervan en de bijzondere betekenis van de resultaten ervan. Toch bestaan er geen

overtuigende redenen waarom alle delen van de analyse die gebaseerd zijn op de actualistische interpretatie radikaal verworpen zouden moeten worden; integendeel, men kan er niet omheen dat zij op zichzelf beschouwd een grote betekenis hebben, bovenal in het licht van de fysische toepassingen.

2.3.1 Onderbreking

In de laatste alinea van het artikel wordt geappelleerd aan een mentaliteit van vrijblijvendheid: opdat de wereld voor menigerlei uitleg vatbaar zij. Dat vind ik jammer, omdat het nu lijkt alsof deze wiskundige zijn eigen fundamentele zienswijze, op de keper beschouwd, toch niet serieus neemt. Het betoog van Gentzen heb ik dan ook afgebroken op dit punt.

2.4 Lang leve Plato

Behalve de Ideale Wereld van Plato hebben binnen de wiskunde andere paradigma's opgeld gedaan. De belangrijkste zijn het Formalisme, waarvan Hilbert de grote vertegenwoordiger is, en het Constructivisme, in zijn meest extreme vorm het Intuïtionisme, waarvan Brouwer de grondlegger is. Eigenlijk zijn zowel het Formalisme als het Constructivisme in zekere zin een *ontkenning* van het Ideaal van Plato. Het Formalisme is begonnen als Logicisme, een beweging die de wiskunde geheel en al poogde te grondvesten op de (mathematische) logika. In zijn meest extreme vorm is het Formalisme te omschrijven als "een zinloos spel met symbolen". Daar komt geen Ideale Wereld meer aan te pas.

Zodra echter de *betekenis* van de wiskunde in het geding is, klimt L.E.J. Brouwer in de pen, met zijn beroemde uitspraak [2] dat de logika slechts "een begeleidend verschijnsel is van wiskundig bouwen". Dit "bouwen" houdt in dat de wiskunde gaandeweg Vorm krijgt, onder de scheppende hand van mathematen. Merk op dat de wereld van Brouwer er één is *in wording*. Bij hem is het pleit dus reeds beslecht: wiskunde is geen ontdekking, maar een uitvinding. Ook bij Brouwer is dus *geen* sprake van een absolute, statische wereld van Platonische Idealen.

En dan komt Gentzen, helemaal aan het eind, tot de konklusie dat een oplossing voor de controversen wel eens zou kunnen liggen in de aanvaarding van "ideale elementen". Maar dat zijn: elementen uit de Wereld van Plato! Wiskunde is dus geen uitvinding, maar een ontdekking. En we zijn weer helemaal terug bij AF. Plato is dood. Lang leve Plato!

Hoofdstuk 3

DE NATUURWETTEN

Het vraagstuk van het continuüm in de wiskunde hangt ten nauwste samen met de opvatting die men heeft van het begrip "oneindig". We hebben de verschillende manieren waarop de mathematen zelf tegen deze materie aankijken reeds de revue laten passeren. We zullen hierna analyseren wat de werkelijke betekenis is van het continuüm binnen de natuurkunde. Maar om te beginnen volgt een fysische beschouwing over het oneindige.

3.1 Fysisch oneindig

Het oneindig grote, hoe is dat formeel wiskundig gedefinieerd? Als volgt:
Een verzameling is oneindig dan en slechts dan als hij gelijkmachting is met een echte deelverzameling van zichzelf.

Populair uitgedrukt: een oneindige verzameling bevat evenveel elementen als een deel van zichzelf. Hoe kan dat? Wel, neem bijvoorbeeld de verzameling van alle natuurlijke getallen. Het is helemaal niet moeilijk om aan ieder natuurlijk getal een *even* getal toe te wijzen. Als volgt namelijk:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	4	6	8	10	12	14	16	18	...

Hoever men hiermee ook doorgaat, steeds vindt men bij ieder natuurlijk getal een even getal als partner. De meeste wiskundigen konkluderen hieruit dat er "evenveel" natuurlijke getallen als even getallen zijn, en deze eigenschap kan alleen opgaan voor oneindige verzamelingen. Andere voorbeelden treft men aan in de meetkunde: zo bevat ieder lijnstuk oneindig (even)veel punten, omdat men een lijnstuk vanuit een punt kan projekeren op een ander lijnstuk, en indirect ook weer op een *gedeelte* van zichzelf.

Het is zeker beleefd om, in een wiskundeboek als dit, een wiskundige aan het woord te laten, als het om kwesties gaat als het oneindigheidsbegrip [15]. Echter wij hebben verkozen om in de eerste plaats te kijken naar wat de mensen van het oneindige feitelijk, in de materiële werkelijkheid, kunnen waarnemen. Niet wat zij ervan denken dus, maar wat zij ervan meten. Waarbij ervoor gewaakt moet worden dat ons waarnemingsvermogen niet al bij voorbaat vertroebeld wordt door het vooroordeel van mathematische theorievorming. De materiewetenschap die ons bij uitstek iets te vertellen zou kunnen hebben, over het al dan niet in de werkelijkheid voorkomen van dingen die oneindig zijn, is de natuurkunde.

Om te beginnen de kosmologie, of de leer van het heelal. Een bekend probleem dat in verband staat met de uitgebreidheid van het heelal, in ruimte en tijd, is de zogenaamde paradox van Olbers. Stel dat het heelal oneindig is in ruimte en tijd; de wereld heeft een oneindig volume en bestaat van alle eeuwigheid. Dan is deze voorstelling al in tegenspraak met de ervaring dat het 's avonds donker wordt als de zon ondergaat. Immers, kijkt men een oneindig heelal in, dan kan men nooit op een donkere achtergrond stoten. Men zou uiteindelijk een ononderbroken muur van sterren moeten zien. Ook zou eventuele donkere materie, die het zicht zou kunnen verduisteren, in een oneindige tijd allang opgewarmd zijn tot de gemiddelde ster temperatuur. Al met al kan worden beredeneerd dat een oneindig heelal op zeer veel fronten in strijd is met de waarneming. Niet voor niets gaat de moderne kosmologie uit van een heelal dat in plaats hiervan *eindig* is, zowel in ruimte als in tijd. (Een finitistische zienswijze die op zich ook nog eens in overeenstemming is met de beste religieuze tradities.) Wat betreft het oneindig grote kan men dus vrij vlug tot een consensus komen, namelijk dat het in de materiële werkelijkheid niet bestaat.

Wagen we de sprong van de kosmologie naar het andere uiterste, van het oneindig grote naar het oneindig kleine: de wereld van de quantummechanika. Vectorruimten van oneindig grote dimensie, zogenaamde Hilbert ruimten, worden vaak ingezet bij quantummechanische berekeningen. Deze vectorruimten hebben zonder uitzondering echter een *volledige* basis (van eigenvectoren). Hetgeen betekent dat ze zich wiskundig gedragen als limietgeval van vectorruimten met een zeer grote, doch *eindige* dimensie. Wij stellen dat deze quantummechanische ruimten in het geheel niet kunnen worden onderscheiden van zeer grote *eindige* vectorruimten, zoals iedere fysicus uit ervaring weet. Maar een tegenvoorbeeld zou theoretisch kunnen worden gekonstrueerd als volgt. Bedenk een model in de quantummechanika waar een oneindige vectorruimte in voorkomt welke *geen* Hilbert ruimte is, die dus geen mogelijk limietgeval is van een eindige ruimte. Ik heb er alle vertrouwen in dat een dergelijk tegenvoorbeeld onmogelijk kan worden gevonden.

Een ander verschijnsel. Laten we eens kijken naar de wetten die gelden voor ideale gassen, onder extreme druk. Wel, in zo'n geval wordt het ene stel natuurwetten eenvoudigweg vervangen door een ander. Zodra het hyperbolische verloop van de gaswet, in de buurt van 0, oneindig dreigt te worden, wordt overgegaan op een ander funktieverloop (: de vloeistof-fase). Zodoende weet de natuur altijd het oneindige te ontwijken: "Horror Infiniti" is complementair aan "Horror Vacui"; het absolute veel bestaat net zo min als het absolute niets.

Waar moeten we nu *als natuurkundigen* naartoe met het oneindigheidsbegrip? In ieder geval blijkt dat het fysisch niet kan worden waargenomen als oneindige uitgebreidheid. Wat kunnen we voorlopig anders konkluderen dan dat het begrip, in de zin van het fysisch onbeperkt grote, *volmaakt zinledig is*. Teneinde nu alle tegenspraak te ontmoedigen, zou men over kunnen gaan tot het formuleren van een Axioma. Want waar dienen axioma's anders voor dan om als vertrekpunt te dienen voor alle verdere redenering. Het Axioma luidt:

Het oneindige bestaat in de materiële werkelijkheid niet.

Kortom: ALLES IS EINDIG.

Gaat men uit van een eindige verzameling natuurlijke getallen, dan is het aantal even getallen hierin ongeveer de helft van het totaal. Dit geldt des te beter naarmate deze verzameling der natuurlijke getallen groter genomen wordt. In het grensgeval van een uiterst grote verzameling natuurlijke getallen kan men zeker wel zeggen dat er half zo veel even getallen zijn als natuurlijke getallen. En het is zo duidelijk als wat: dat het er *niet* "evenveel" zijn.

3.2 Wegen naar chaos

Er is nauwelijks een toepassingsgebied te bedenken waar meer aspecten van de natuurkunde aan bod komen dan in de weersvoorspelling. "Hoe voorspelbaar is het weer?" We maken gebruik van een artikel in "Intermediair" uit 1984, geschreven door prof. H. Tennekes, verbonden aan het KNMI. De stelling van Tennekes is dat de weersverwachting een produkt is met een beperkte betrouwbaarheid en beperkte duurzaamheid, ook wanneer mensen en computers hun werk foutloos zouden verrichten. Men zou kunnen veronderstellen dat de beperkte voorspelbaarheid van het weer wordt veroorzaakt door de beperkingen in het oplossend vermogen en in de nauwkeurigheid: als er maar zuiver genoeg gemeten en gerekend wordt, met een voldoende kleine maaswijdte - dus nog grotere en duurdere computers - dan zou het weer in principe over oneindig lange tijd voorspelbaar moeten zijn. Zo ligt de zaak echter niet. [17]

Sinds omstreeks 1970 bestaan er duidelijke theoretische uitspraken over de grenzen van voorspelbaarheid in de atmosferische circulatie. Het blijkt *principeel* onmogelijk te zijn om het weer meer dan ongeveer veertien dagen vooruit te voorspellen. Deze konklusie is gebaseerd op studies van de foutengroei in het stelsel van wiskundige formules waarmee de atmosfeer wordt beschreven. De gevoeligheid voor kleine fouten in de waarneming en diagnose van de begintoestand is zó groot dat binnen twee weken de oplossing grondig wordt bedorven. De beperkte voorspelbaarheid van het weer is een principeel natuurwetenschappelijk probleem. Het weer is naar zijn essentie 'wisselvallig' en 'onbestendig'.

Omdat dit een konklusie is die zeer ingrijpende konsekventies kan hebben voor het beeld dat velen zich van wetenschappelijke en technische vooruitgang hebben gemaakt, wordt in het artikel nader ingegaan op de oorzaken en achtergronden van de beperkte voorspelbaarheid. Om te beginnen is er een ontwikkeling in de modelbouw: naarmate de computermodellen van de atmosfeer ingewikkelder worden en voor een betere representatie van de natuurkundige wetmatigheden zorgen, blijken ze steeds gevoeliger te worden voor storingen in de beginvoorwaarden. In simpele modellen duurt het ongeveer vijf dagen voordat kleine verschillen in de begintoestand twee keer zo groot zijn geworden. In het uiterst ingewikkelde model van het Europees Centrum duurt dat slechts drie dagen. De vermoedelijke verdubbelingstijd van storingen in een perfect model van de atmosfeer is ongeveer twee dagen. Betere modellen leveren betere verwachtingen, maar hebben een grotere gevoeligheid voor kleine storingen. De atmosfeer - die in elk geval een perfect model van zichzelf is - is gevoeliger dan welk computermodel ook.

De atmosferische circulatie is een voorbeeld van een dynamisch systeem waarvan alle eigenschappen in principe exakt bekend zijn. Als we van dit systeem de begintoestand exakt zouden kunnen vastleggen, dan zou het in principe mogelijk moeten zijn alle toekomstige toestanden exakt uit te rekenen. Maar wat gebeurt er wanneer de precisie niet oneindig groot is? Voor de atmosfeer, en voor vele andere dynamische systemen, geldt dat een willekeurig kleine fout in de begintoestand op den duur grote fouten in de berekeningen veroorzaakt. Tennekes zegt letterlijk: Zo komt de inhoud van het begrip 'exakt' op de helling te staan.

Sinds omstreeks 1960 bestuderen vele wiskundigen de theorie van systemen die, net als de atmosfeer, gevoelig zijn voor storingen in de begintoestand. Baanbrekend werk werd verricht door de in de meteorologie terechtgekomen wiskundige E.N. Lorenz. Het werk van Lorenz en anderen heeft geleid tot een uitgebreide literatuur over het chaotische gedrag van deterministische systemen. Tot zover het betoog van Tennekes.

Iedereen heeft vandaag de dag wel kennis genomen van ideeën over "fractals" en "chaos", al was het alleen maar via de prachtige met de com-

puter gegenereerde beelden die tegenwoordig gemeengoed zijn in reclame en speelfilms. Vertaald uit het Engels volgt hier een passage, afkomstig uit het boek van Mandelbrot "The Fractal Geometry of Nature" [18]. (Terzijde wordt opgemerkt dat Benoit Mandelbrot een van de zeldzame wiskundigen is die grote zorg heeft besteed aan een goed woordgebruik binnen zijn theorie.) Genoemde passage is op haar beurt weer een vertaling vanuit het Frans, dus het is niet duidelijk wat er van de oorspronkelijke tekst is overgebleven. Aan het woord is de Nobelprijswinnaar Jean Perrin:

Beschouw bijvoorbeeld de manier waarop we de dichtheid van lucht in een gegeven punt en op een gegeven tijdstip definiëren. We denken ons rondom dat punt een bol met volume v en een massa m . Het quotiënt m/v is de gemiddelde dichtheid binnen de bol, en met *werkelijke* dichtheid bedoelen we een of andere grenswaarde van dit quotiënt. Echter, dit begrip houdt in dat op een gegeven ogenblik de gemiddelde dichtheid praktisch konstant is voor bollen kleiner dan een zeker volume. Deze gemiddelde dichtheid kan waarneembaar verschillend zijn voor bollen die respectievelijk 1,000 kubieke meter en 1 kubieke centimeter bevatten, maar er mag verwacht worden dat zij maar 1 op de 1,000,000 varieert wanneer men 1 kubieke centimeter met een-duizendste van een kubieke millimeter vergelijkt.

Veronderstel nu dat het volume voortdurend kleiner wordt. In plaats van dat ze steeds minder belangrijk worden, beginnen deze fluctuaties weer aan te groeien. Voor schalen waarop de Brownse beweging grote activiteit vertoont, kunnen de fluctuaties een verhouding van 1 op 1,000 bereiken, en ze worden van de orde 1 op 5 wanneer de straal van het denkbeeldige bolletje in de buurt komt van een honderdste van een micron.

Een stap verder en de omvang van ons bolletje wordt van de orde van de straal van een molecuul. In een gas zal het zich in het algemeen in de intermoleculaire ruimte bevinden, waar de gemiddelde dichtheid ervan dientengevolge zal verdwijnen. In ons punt zal de *werkelijke* dichtheid eveneens verdwijnen. Maar eens in de duizend keer zal dat punt binnen een molecuul liggen, en de gemiddelde dichtheid zal duizend keer hoger zijn dan de waarde die we gewoonlijk aannemen voor de werkelijke dichtheid van het gas. Einde passage.

Uit wat Perrin erover zegt is duidelijk dat de wetten van de stromingsleer geen natuurwetten zijn in die zin dat ze universeel en "exakt" zouden opgaan. Het is zonneklaar dat deze wetten niet meer voorstellen dan een benadering. Immers, de "diepere werkelijkheid" onder de stromingsleerwetten wordt uitgemaakt door een substraat van bewegende moleculen. En van die moleculen gaan er eerder veel dan weinig in een "infinitesimaal" volume (het bolletje). Dit "oneindig kleine" volume moet namelijk *wel* zo groot gekozen worden dat de door Perrin genoemde fluctuaties verwaarloosbaar blijven. Dit betekent bijvoorbeeld voor lucht dat we niet veel kleiner

kunnen gaan dan ongeveer een micron. Binnen een straal van een micron verliezen de "natuurwetten" van de stromingsleer dan ook hun geldigheid, en moeten we overstappen op een andere beschrijvingswijze (bijvoorbeeld die van een "Knudsen gas").

Brengen we een en ander met elkaar in verband, dan is het duidelijk dat niet alleen de beginvoorwaarden verantwoordelijk zijn voor 'de weg naar chaos' die door de atmosfeer wordt afgelegd. Uit het betoog van Perrin blijkt dat ook in de stromingsvergelijkingen zélf "fluctuaties" verdisconteerd moeten worden. Onnauwkeurigheid en inexaktheid zijn wat de stromingsleer betreft de "diepere" werkelijkheid, in alle opzichten, zowel wat de randvoorwaarden als wat de vergelijkingen betreft. De gladde analytische benadering die men om dat ruwe stramien heeft heengeplooid is niet meer dan een dunne, doorschijnende laag.

3.3 QuantumElectroDynamica

Wat geldt voor de stromingsleer, geldt wellicht algemener. Bekend is met name dat de wetten van het elektromagnetisme wat de vorm betreft identiek zijn aan de wetten die het gedrag van een wrijvingsloze stroming beschrijven. Een analogie die bij menig natuurkundige de nodige verwondering heeft opgewekt. Maar zou het niet zo kunnen zijn dat ook aan het elektromagnetisme een soort van moleculair substraat ten grondslag ligt, waaroverheen weer de analytische benadering ligt? Met andere woorden: is het niet zo dat ook de theorie van het elektromagnetisme tenslotte geen ijzeren stelsel natuurwetten is, maar slechts een exakt lijkende analytische benadering, analoog aan die in de stromingsleer. Misschien dat een dergelijke zienswijze een ander licht werpt op de oneindigheidscatastrofes die de theorie sinds jaar en dag teisteren [19]. Teken aan de wand is dat de hele ellende bovendien een direkt gevolg lijkt te zijn van de aanname dat het elektron een echte puntlading is, waarbij het begrip "punt" wordt begrepen, zeker, in de klassieke mathematische betekenis: met oneindig kleine afmetingen.

De kwestie kan overigens ter plaatse worden gedemonstreerd aan de hand van een klassiek voorbeeld: bereken de veldenergie van het elektron. In het algemeen wordt de energiedichtheid in het elektrische veld van een puntlading gegeven door: $w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ waarin de veldsterkte E op een afstand r is:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

De totale energie in het veld wordt dus gegeven door de integraal:

$$U = \int_0^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr =$$

$$\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \infty$$

Er is dus een oneindige uitkomst voor de veldenergie van het elektron. Dit is een bijzonder ernstige zaak, omdat het wegens de equivalentie van energie en massa $E = mc^2$ bijvoorbeeld impliceert dat een elektron in het geheel niet kan bewegen, hetgeen in flagrante tegenspraak is met alle experimenten. Men zou nu kunnen denken dat dit probleem gemakkelijk op te lossen is door aan elektronen een eindige straal toe te kennen. Dan komt men echter bedrogen uit. Feynman behandelt de materie uitgebreid in [19], het boeiende hoofdstuk "Electromagnetic Mass".

Toegegeven dat er problemen rijzen bij de exakte formulering van de klassieke electrodynamica, men mag dan toch verwachten dat de *quantum-mechanische* versie van de theorie verbeteringen in petto heeft. Wellicht dat bijvoorbeeld de SchrödingerVergelijking aanspraak mag maken op het predikaat een natuurwet te zijn waarvan de universele geldigheid niet kan worden betwijfeld. Helaas. Het is bekend dat de Schrödinger vergelijking niet exakt geldt, al was het alleen maar omdat ze niet "Lorenz invariant" is (: niet klopt met de Speciale RelativiteitsTheorie). Maar afgezien daarvan zijn er legio andere argumenten waarom aan de partiële differentiaalvergelijkingen van de quantummechanica, en dus ook aan de vergelijkingen van de quantum-elektrodynamica, ook al geen exakte geldigheid kan worden toegedicht.

De fysicus David Bohm zegt er in [7] het volgende van. Als men de bestaande quantumtheorie toepast op de electrodynamica van "elementaire" deeltjes (zoals elektronen, protonen, enz.), schijnen er inwendige tegenspraken in de theorie op te treden. Deze tegenspraken staan in verband met de voorspelling van oneindige waarden voor verscheidene fysische eigenschappen, zoals de massa en lading van een elektron. Al deze oneindigheden komen voort uit de extrapolatie van de huidige theorie naar *onbeperkt kleine afstanden*. Een van de belangrijkste onder de dingen, die zulk een extrapolatie noodzakelijk maken, is de veronderstelling - die een intrinsiek kenmerk schijnt te zijn van de tegenwoordige theorieën, dat "elementaire" deeltjes, zoals elektronen, wiskundige *punten* zijn, d.w.z. dat ze in het geheel geen ruimte innemen. Aan de andere kant heeft men, niettegenstaande vele jaren actief zoeken door theoretische fysici van de gehele wereld, nog geen manier gevonden om de aanname, dat een elektron

een beperkt deel van de ruimte inneemt, zonder tegenstrijdigheden aan de huidige quantumtheorie toe te voegen.

Voetnoot: De meeste moeilijkheden ontstaan wanneer men zo'n veronderstelling in overeenstemming tracht te brengen met de relativiteitstheorie.

Einde fragment [7]. Bohm suggereert verder dat de moeilijkheden opgelost kunnen worden door een sub-quantummechanisch niveau aan te nemen waarvan de huidige theorie slechts een "linearisatie" is. De materie is ook bij Bohm een mathematisch continuüm, waarin deeltjes optreden als niet-lineaire verstoringen. Ons inziens is dat een verschuiven van het probleem. Desondanks geeft het citaat een goede samenvatting van de problematiek.

De behandeling van de quantummechanica in deel III van de "Feynman Lectures on Physics" is een didaktische mijlpaal zonder weerga. Afgezien daarvan, Feynman zegt dat in dit boek de quantummechanica "achterstevoren" wordt gepresenteerd. In ieder geval gaat hij precies andersom te werk als gewoonlijk, en dat blijkt bij meer dan één gelegenheid nieuwe gezichtspunten op te leveren. Begonnen wordt met een volkomen *diskrete* beschrijving. Naderhand wordt de continuïteit in de tijd ingevoerd, als limietgeval van een eindig lang wachtproces (hoofdstuk 8). Men moet geduld hebben tot hoofdstuk 16 voordat iets soortgelijks gebeurt met de plaats: pas daar wordt de Schrödinger vergelijking "afgeleid", door de atoomafstanden van een hypothetisch diskreet kristalrooster tot nul te laten naderen. De moraal van dit verhaal zou kunnen zijn dat dus ook de Schrödinger vergelijking beschouwd dient te worden als een benadering, die over *een in wezen diskreet substraat* van ruimte en tijd wordt gezet.

Maar we wisten al dat de Schrödinger vergelijking een benadering is, slechts van toepassing namelijk op niet-relativistische omstandigheden. Hoe staat het dan met de Dirac vergelijking, die immers wel degelijk Lorentz-invariant is? Interessant is de zogenaamde Foldy-Wouthuysen representatie, een uitwerking van de Dirac vergelijking die allerlei merkwaardige fenomenen aan het licht brengt. Zoals de "Zitterbewegung": het elektron lijkt binnen een gebiedje ter grootte $\hbar/mc$ een zeer snelle beweging om zijn rustpositie uit te voeren.

Ook op grond van andere formules is er een sterke analogie tussen de existentie van een elektron in een kristalrooster en een elektron in vacuüm. Als b de rooster-afstand is en A de energie die nodig is om van het ene atoom naar het andere te komen, dan heeft het elektron in het kristalrooster een zogenaamde *effektieve massa*, die gelijk is aan:

$$m_{eff} = \frac{\hbar^2}{2Ab^2}$$

En de hiermee overeenkomende energie-niveaus zijn gelijk aan:

$$E = E_0 \pm 2A$$

Vergelijk dit met de situatie in vacuüm. Daar geldt voor de energie van een elektron en zijn anti-deeltje (positron):

$$E = 0 \pm m_0 c^2$$

Dus $E_0 = 0$ en $2A = m_0 c^2$. (Het is overigens nog maar de vraag of de energie van het vacuüm inderdaad nul is.) Neemt men verder aan dat het elektron inderdaad een "Zitterbewegung" uitvoert met sprongen ter grootte van $\hbar/m_0 c$. Dan kan de effectieve massa in vacuüm worden berekend. De uitkomst spreekt voor zich:

$$m_{eff} = \frac{\hbar^2}{m_0 c^2 (\hbar/m_0 c)^2} = m_0$$

Dus ondanks het feit dat een exakt bepaalde elektronstraal geen soelaas biedt voor een theoretisch ontplofende elektronmassa, lijkt het toch zo te zijn dat electromagnetische massa samenhangt met een onnauwkeurigheid in de leefruimte van het deeltje. Dit hoofdstuk heeft nog een staartje, verderop, in de "Theorie van Bopp" (Continue bovenbouw).

3.4 Relativiteitstheorie

De Dirac vergelijking steunt op haar beurt op de speciale relativiteitstheorie, waarvan we nu proberen vast te stellen in hoeverre deze onbeperkt geldig zou kunnen zijn.

Voor het volgende refereren we naar het boekwerkje [20] van de bekende fysicus Léon Brioullin, dat handelt over de Relativiteitstheorie van Einstein. Brillouin konstateert onder andere dat het niet geoorloofd is, zoals Einstein doet, om een fysisch referentie-systeem zonder meer gelijk te stellen met een mathematisch systeem van coördinaten. Het referentie-systeem is namelijk een "laboratorium" met een (tamelijk grote) massa. Het coördinaten-systeem is daarentegen een massaloos wiskundig concept. Dat er wel degelijk verschil gemaakt moet worden, blijkt uit de gedachte-experimenten die door Einstein worden gebruikt om zijn Lorenz-transformaties af te leiden. Nadere analyse leert dat in deze gedachte-experimenten de (grote!) massa van referentie-systemen als een *verborgen aanname* verweven is.

Zo laat Einstein lichtstralen heen en weer zenden tussen een systeem O en een systeem O' . Hij neemt daarbij aan dat er een *gegeven* snelheid v

bestaat van O' ten opzichte van O . Terecht merkt Brillouin op dat deze "gegeven snelheid" dan eerst maar eens *gemeten* moet worden. Maar stel dat we dit doen met lichtstralen, dan zullen de fotonen, zodra zij worden teruggekaatst, het reflekterende objekt achteruit stoten (terugstoot effect) en daarmee de snelheid ervan veranderen. *Het is dus niet mogelijk om de snelheid van O' ten opzichte van O helemaal exakt te weten te komen.* Zelfs in principe niet. Brillouin konkludeert terecht: De gegeven snelheid is slechts een mythe van onze verbeelding. Het is een traditionele blunder, die voortkomt uit de illusie dat 'kijken naar iets geen pijn doet'. En verder: Het ouderwetse relativiteits-beginsel is een droom; het vertegenwoordigt alleen een grensgeval, maar het mag bijvoorbeeld niet gebruikt worden, zonder de grootste zorgvuldigheid in acht te nemen, wanneer het aankomt op bewegende deeltjes met zeer kleine massa's.

De beperkte nauwkeurigheid van de rustpositie van een elektron stelt inderdaad grenzen aan de makroskopische theorie, waarvan tot op dit moment verondersteld kon worden dat zij onbeperkte geldigheid bezit: de relativiteitstheorie. Om een en ander beter in te zien moeten we enkele details lichten uit de gedachte-experimenten welke door Einstein worden gebruikt om zijn Lorenz-transformaties af te leiden.

Met name wordt aandacht gevraagd voor de "klokken" van de relativiteitstheorie. Deze klokken worden verondersteld extreem korte signalen te kunnen uitzenden. Bovendien zijn ze in staat om het tijdsinterval tussen een uitgezonden en een ontvangen signaal zeer nauwkeurig te meten. Met andere woorden, een Einsteinse klok is een radar systeem. Maar de eisen die aan een dergelijk systeem worden gesteld verschillen aanzienlijk van de eisen die men stelt aan een gewone klok, die in plaats van een systeem met scherpe pulsen een zo regelmatig mogelijke trilling is: een frequentie-standaard. Klokken die in dit opzicht het ideaal dicht benaderen zijn de moderne atoom-klokken. Een zwak punt in de redenering van Einstein is dat in het geheel niet duidelijk wordt hoe dergelijke moderne tijdmeters ingezet moeten worden.

Laat ons een experiment van Einstein overdoen, maar nu zonder al te veel zaken over het hoofd te zien. Wij gebruiken daarom een radarpuls van eindige breedte, en kiezen daarvoor funktie $\text{sinc}(2\pi t/\tau)$, waarin $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. De "spreiding" van deze puls is gelijk aan $\frac{1}{2}\tau$. We moduleren deze radarpuls op de draaggolf van een atoomklok, met precieze frequentie ω . Het spektrum van dit signaal heeft de vorm van een blok, met een breedte van $2\pi/\tau$ aan beide zijden van de hoofdfrequentie. Omdat frequenties altijd positief zijn geldt daarbij: $\omega > 2\pi/\tau$ of $\frac{1}{2}\tau > \pi/\omega$. Met behulp van dit radarsignaal probeert nu de waarnemer in het ene bewegende systeem zijn klok gelijk te zetten met de klok van de waarnemer in het andere bewegende systeem. Echter de wisselwerking met de materie van een spiegel gaat on-

herroepelijk gepaard met een Compton effect: uiteindelijk zijn elektronen verantwoordelijk voor de terugkaatsing van licht. Dit Compton effect verandert niets aan de breedte van de puls (omdat ook de breedte van het spektrum niet verandert). Wat *wel* verandert is de modulatie-frequentie van het signaal. Immers, de golflengte wordt $2\pi c/\omega + 2h/mc$ (: over 180 graden). Dit betekent dat de voorwaarde dat frequenties positief zijn verandert in: $\frac{1}{2}\tau > \pi/\omega + h/mc^2$. Dus altijd geldt dat:

$$\frac{1}{2}\tau \gg h/mc^2$$

De spreiding van een radarpuls moet dus (veel) groter zijn dan h/mc^2 wanneer men zijn klok gelijk wil zetten met die van een referentiesysteem. Er kan dus nooit worden nagegaan of twee klokken binnen deze nauwkeurigheid al dan niet "gelijk" lopen.

De Lorenz transformatie voor de tijd moet op grond van bovenstaand argument met een korrel zout worden genomen. Van deze natuurwet is niet aantoonbaar dat zij exakt geldt. Integendeel, hetzelfde gedachte-experiment waarmee de wetmatigheid werd afgeleid brengt bij preciezere uitvoering de fundamentele onnauwkeurigheid van de wet aan het licht.

Wat geldt voor de tijd, geldt analoog voor de plaats. Vanuit de QuantumElectroDynamica is bekend [21] dat er een kleinst mogelijke nauwkeurigheid bestaat voor het meten van de positie van een elektron in rust. Deze nauwkeurigheid bedraagt:

$$\Delta x = \frac{h}{mc}$$

Hierin is: x = positie ; h = constante van Planck ; m = elektronmassa; c = lichtsnelheid. Indien men probeert om toch onder deze onnauwkeurigheid uit te komen, dan wordt die poging onmiddellijk bestraft met de produktie van elektron-positron paren. Dat is geen meting meer, maar een ontploffing.

Een plausible verklaring voor dit fenomeen van beperkte nauwkeurigheid wordt wederom gevonden in het Compton effect. Wanneer iemand probeert de positie van het elektron vast te stellen, dan kan hij dit proberen te doen met behulp van een lichtmikroskoop. We nemen in onze gedachte experimenten aan dat deze mikroskoop er een is van een tamelijk universeel type: we hoeven ons niet te beperken tot zichtbaar licht, maar kunnen bijvoorbeeld ook harde gammastraling inzetten. Om het elektron te kunnen "zien" sturen we er een lichtpuls op af. Zoals bekend bestaat alle licht uit fotonen. Wanneer een foton botst met het elektron, dan zal om te beginnen het deeltje van zijn plaats worden geschopt. Het weegt immers bijna niets. Maar ook de golflengte van het invallende foton zal veranderen. Er geldt bij benadering: $\lambda' = \lambda + h/mc$ (: neem aan dat de hoek van verstrooiing 90

graden is). Nu kunnen met een mikroskoop geen details waargenomen worden waarvan de afmetingen kleiner zijn dan de golflengte van het gebruikte licht. Er kunnen dus alleen lengtes Δx worden gemeten waarvoor geldt: $\Delta x > \lambda + h/mc$. Altijd is dus $\Delta x \gg h/mc$. Bij uiterst korte golflengtes wordt de (gamma)straling dermate energierijk dat allerlei nieuwe deeltjes worden gecreëerd, waardoor het beoogde experiment ontaardt in een volledig zinloze aangelegenheid. De onnauwkeurigheid in een positie is bijgevolg altijd groter dan h/mc . Dit is tevens de onnauwkeurigheid in de Lorentz transformatie van de plaats.

De speciale relativiteitstheorie paalt op deze wijze haar eigen grenzen af, en dat op zich is eigenlijk heel bijzonder:

De geldigheid van de Lorentz-transformaties wordt fundamenteel begrensd door onnauwkeurigheden in plaats en tijd, die respectievelijk van de grootteorde h/mc en h/mc^2 zijn, ofwel 10^{-13} m en 10^{-21} s.

Met andere woorden, in de formules:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{en} \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

mag het *gelijkteten* = niet strikt worden opgevat, maar moet deze gelijkheid worden begrepen als een "ongeveer gelijk" $\approx$.

Als iemand die onbevangen en onbevoegd is, neem ik toch de vrijheid om soms een beetje te speculeren, hier en ook elders. Zoals gezegd bestaat het vermoeden dat er zich onder de formules van de elektrodynamica en de relativiteitstheorie een soort van moleculair substraat bevindt, precies zoals dat het geval is bij de stromingsleer. We spreken hier feitelijk over een diskretisatie van ruimte en tijd. Als eenheden van deze diskretisatie komen in aanmerking de grootheden h/mc en h/mc^2 . Omdat hier de massa van een specifiek deeltje in voorkomt, het elektron, denken we dat voor ieder elementair deeltje de "eigen" ruimte en tijd echter anders gediskretiseerd zullen zijn. (Dit komt overeen met het idee dat de tijd geen absoluut tempo heeft.) Bevestiging is te vinden in sommige van de huidige QED theorieën. Zo heeft Feynman voor zijn integraalformulering van de Quantum ElektroDynamica een tijd-diskretisatie daadwerkelijk nodig. Men leest in Schwinger iets over "tijdstippen $t_i = t_{i-1} + \epsilon$ ", gelijkmatig verdeeld over een *eindig* interval. Verder in een artikel van Feynman de zin dat "elektronen die terug in de tijd reizen herkend worden als positronen". Inderdaad volgt uit de formule h/mc^2 dat deeltjes met negatieve rustmassa een eigen tijdstap hebben die negatief is. Tot zover deze uitwijding.

3.5 Zwarte gaten

Een even spannend als omstreden onderwerp in de moderne Kosmologie is de theorie van de zwarte gaten (naam bedacht door John Wheeler: "black holes"). Lees het boek van Shu [22], teneinde een relevant overzicht te bekomen van de stand van zaken op dit gebied. Wanneer het gaat over de levens-cyclus van sterren, dan zijn er een aantal eind-stadia te onderscheiden, naargelang de zwaarte van de ster, uitgedrukt in zons-massa's $M_{\odot}$. Karakteristieke getallen zijn, volgens de huidige inzichten: $0.7M_{\odot}$ (: witte dwerg), $1.4M_{\odot}$ (: pulsar), 2 of $3M_{\odot}$ (: zwart gat).

Een foutieve afleiding voor de afmetingen van een zwart gat, die niettemin tot tot een juiste konklusie leidt, is oorspronkelijk bedacht door Pierre Laplace. Schwarzschild heeft hiervoor in de plaats een korrekte(re) afleiding gezet die (uiteeraard) gebaseerd is op de Algemene Relativiteits-Theorie. Wij beperken ons hier tot de heuristiek van Laplace, welke uitgaat van de Newtonse mechanika.

De ontsnappings-snelheid van een raket aan het oppervlak van een hemellichaam is gelijk aan de potentiële energie ter plaatse:

$$\frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{R}$$

Hierin is v = ontsnappings-snelheid, m = massa van de raket, G = gravitatie constante, M = massa van het hemellichaam, R = straal van het hemellichaam. De grootst mogelijke ontsnappings-snelheid is volgens de relativiteits-theorie de lichtssnelheid c . Substitueer $v = c$ in bovenstaande formule en doop R om in R_{Sch} , de zogenaamde Schwarzschild radius. Dan geldt blijkbaar:

$$R_{Sch} = \frac{2GM}{c^2}$$

De fysische betekenis hiervan is dat vanaf het oppervlak van een hemellichaam, waarvan de massa zodanig is samengeperst in een klein volume, dat de afmetingen gelijk of kleiner zijn dan de Schwarzschild radius, geen enkel ding meer in de ruimte kan ontsnappen, zelfs niet iets wat met de lichtsnelheid gaat, zelfs geen licht dus. Een dergelijk hemellichaam, mits het zou bestaan, wordt daarom een zwart gat genoemd.

Er is een tamelijk uitgewerkte theorie over zwarte gaten ontwikkeld, ondanks het feit dat tot nu toe nog van geen enkel exemplaar het bestaan overtuigend kon worden aangetoond. In een aantal formules van deze theorie, zie [22], komt de volgende uitdrukking voor:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - R_{Sch}/r}}$$

Deze uitdrukking is bijvoorbeeld verantwoordelijk voor de letterlijk oneindige zwaartekracht in de buurt van een zwart gat. In [22] wordt dan ook gezegd dat "geen enkele bekende kracht in de natuur in staat is om weerstand te bieden aan deze ineenstorting, tot een singulariteit met een oneindige dichtheid". Ook zal, op grond van eenzelfde formule, de klok van een waarnemer nabij een zwart gat enorm traag gaan lopen, gezien vanaf hier.

Voor stabiele sterren vindt men met behulp van de Algemene RelativiteitsTheorie een buitengewoon fraai en algemeen resultaat. Onafhankelijk van de toestandsvergelijking van de materie binnen de ster geldt namelijk dat de straal van de ster iets groter is dan de Schwarzschild straal. Om precies te zijn $9/8$ maal, volgens vergelijking (23.18) uit [23]:

$$r > \frac{9}{8} R_{Sch}$$

Een stabiele ster kan dus nooit een zwart gat opleveren. Een zwart gat moet om te beginnen *permanent instabiel* zijn. Dit is op zich al moeilijk voor te stellen fysisch.

Alle astronomen zijn het er over eens dat zwarte gaten, mochten ze bestaan, er niet zijn a priori, maar dat ze *ontstaan* uit het imploderen van een ster. In dat geval zit er echter volgens mij een tegenstrijdigheid in de theorie, welke men door eenvoudig redeneren kan opsporen. Laten we even aannemen dat een singulariteit fysisch bestaanbaar is, dan ontstaat deze bij het imploderen van een ster in ieder geval niet plotseling. Er is enige *tijd* mee gemoeid. In die tijd nadert de omvang van de ster van buitenaf tot de Schwarzschild radius. Dit betekent dat de buitenste massa's naar binnen toe bewegen. In de buurt van de Schwarzschild radius gelden reeds bij benadering de formules in [22]. Met name zullen de klokken op de bijna-singulariteit enorme vertraging oplopen. De tijd die benodigd is voor het verder naar de horizon bewegen van een deeltje in de buitenste lagen neemt dus steeds verder toe. Naarmate het de waarnemingshorizon nadert, wordt de tijd (vanaf hier gezien) zelfs oneindig groot. Anders gezegd: de buitenste lagen kunnen nooit tot de Schwarzschild radius imploderen, omdat zoiets letterlijk een eeuwigheid in beslag zou nemen. Zelfs de omvang van een imploderende ster zal altijd groter blijven dan zijn Schwarzschild radius.

Er kan dus op deze manier niet een echt zwart gat ontstaan. Bovendien zal het verder imploderen zo traag verlopen dat er hoe dan ook sprake is van een soort (quasi-)stationaire toestand. En hadden we daarvoor niet de limiet $9/8$ maal R_{Sch} gevonden? Ook een hemellichaam met een straal van $9/8 R_{Sch}$ is overigens onvoorstelbaar compact, en valt fysisch nauwelijks te onderscheiden van een "echt" zwart gat.

We vragen ons bovendien de hele tijd af waarom er in de Kosmologie plotseling *wel* sprake zou kunnen zijn van een *echte* oneindigheid. Ons Ax-

ioma luidt immers dat Alles Eindig is. Dit is en blijft het uitgangspunt van alle redeneringen die we opzetten, en we moeten ons niet van de wijs laten brengen door een applicatie die zagezegd wat verder van huis is. En een bewering als zou een echte singulariteit "onze" fysica niet kunnen beïnvloeden, omdat het een oneindigheid is die "achter de waarnemingshorizon ligt", iets wat je dus per definitie niet zou kunnen waarnemen en wat toch "bestaat", ruikt dat niet heel sterk naar MetaFysika? De welhaast onvermijdelijke gevolgtrekking laat zich raden:

$$r > R_{Sch}$$

Met andere woorden:

De straal van een (hemel)lichaam is altijd groter dan de Schwarzschild radius.

Op dezelfde manier als men uit $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ terecht konkludeert dat iedere snelheid kleiner is dan de lichtsnelheid: $v < c$. Waarom geloven er dan toch meer mensen in Zwarte Gaten dan in tachionen?

Het is overigens geen schande om vraagtekens te zetten bij de geldigheid van de Algemene RelativiteitsTheorie in het algemeen. Léon Brillouin spreekt in dit verband over "een prachtig stuk wiskunde, gebouwd op drijfzand" [20]. Nog steeds zijn er niet meer dan een handvol magere experimentele aanwijzingen die steun bieden aan de A.R.T. Inderdaad meer een kunst dan een wetenschap?

Tamelijk speculatief worden de konklusies, wanneer we ze in verband brengen met de afmetingen van elementaire deeltjes, die immers een onduidelijkheid in hun eigen leefruimte hebben, in de orde van $\hbar/(mc)$:

$$\frac{\hbar}{mc} > 2 \times \frac{2Gm}{c^2} \implies m < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$$

Wanneer het een en ander wordt uitgerekend, dan vinden we:

Aan de massa van elementaire deeltjes is een absolute bovengrens gesteld van $\frac{1}{2} \times$ de zogenaamde Planck-massa $m_P = \sqrt{\hbar c/G}$. De numerieke waarde van m_P is vrij groot, en bedraagt 0.2177 mg (milligram).

Met de Planck-massa geassocieerd zijn de Planck-lengte $x_P = \hbar/(m_P c)$ en de Planck-tijd $t_P = \hbar/(m_P c^2)$. De bijbehorende numerieke waarden zijn respectievelijk $x_P = 1.6156 \cdot 10^{-36}$ en $t_P = 0.5389 \cdot 10^{-44}$. Absurd kleine waarden, die een absolute *ondergrens* stellen aan granulatie van de (eigen) ruimte-tijd. Maar als zwarte gaten macroscopisch kunnen bestaan, dan is er ook geen reden om microscopisch een dergelijke ondergrens te poneren. Dan zou de ruimte-tijd dus toch nog "echt" continu kunnen zijn?

Op grond van het Axioma dat Alles Eindig is, worden naakte singulariteiten naar het rijk der fabelen, pardon: naar het Rijk der zuivere Ideeën

terugverwezen. We zien tevens dat er een zekere samenhang is met het corpusculaire substraat dat onvermijdelijk aan een (eigen) ruimte-tijd continuüm ten grondslag ligt. We hebben steeds aangenomen dat de algemene relativiteitstheorie, ook onder extreme situaties, zijn geldigheid blijft behouden. Het is echter denkbaar dat de algemene relativiteitstheorie, net als de ideale gaswet, onder zulke extreme omstandigheden condenseert in een ander stel natuurwetten. Hoe het ook zij, in elk geval geeft het EindigheidsAxioma aanleiding tot rigoureuze konklusies: In een fysisch korrek Universum bestaan geen zwarte gaten en is ruimte-tijd altijd voorzien van een diskrete ondergrond. De details van de diskretisatie hangen samen met de vraag in hoeverre de Algemene RelativiteitsTheorie geldig is, eventueel onder extreme macroscopische of microscopische omstandigheden.

Merk op dat onze theorie nu bovendien duidelijk falsificeerbaar is geworden: mocht men (onverhoopt) toch op het spoor komen van zwarte gaten, dan dient ook het EindigheidsAxioma te worden herzien. Met alle consequenties vandien, want dan is er ook niet noodzakelijk sprake van een vrij onnauwkeurig continuüm. Kortom: dan blijft er van de inhoud van dit boek nog nauwelijks iets overeind.

3.6 Quod Erat Demonstrandum

We hebben een aantal fundamentele fysische theorieën onder de loep genomen en vastgesteld dat noch het oneindig grote, noch het oneindig kleine in de natuur kan worden waargenomen, zelfs op papier (theoretisch) niet. Experimenteel was dit altijd al duidelijk. Niet bestaan van het oneindig grote houdt in dat er fysisch geen echte singulariteiten kunnen optreden, nergens, ook niet in een ver van mijn bed show als de moderne Kosmologie. Niet bestaan van het oneindig kleine houdt in dat een oneindige nauwkeurigheid of "exaktheid" in de natuur niet voorkomt, nergens, ook niet in de moderne Kernfysica.

Allereerst is gebleken dat de continuïteit van stromingen niet meer is dan een dun laagje vernis om een wilde dans van molekulen heen. Het is intussen meer dan waarschijnlijk dat een soortgelijke zienswijze ook korrekt is voor allerlei andere continuüm modellen in de fysika, waaronder zelfs de meest fundamentele, zoals de Speciale (dus ook de Algemene) RelativiteitsTheorie en de QuantumElektroDynamika.

We hebben met behulp van eenvoudige gedachte-experimenten aangetoond dat zelfs van de meest fundamentele fysische theorieën niet kan worden bewezen dat ze met oneindige accuratesse geldig zouden zijn. We menen zelfs het tegendeel te moeten suggereren. Aangezien er feitelijk geen enkele fysische theorie resteert die redelijkerwijs aanspraak mag maken op "ex-

akte" geldigheid, moeten wij wel de konklusie trekken dat wat betreft het werkelijk voorkomen van een oneindige nauwkeurigheid of exaktheid, in natuur en techniek, bij deze: het doek valt.

De ontheiliging is voltooid. Voordat ik hier achter kwam, was er een essentieel verschil tussen de fundamentele en de toegepaste natuurkunde. Het is nu niet langer in te zien hoe dit onderscheid kan worden gehandhaafd. Van een jacht op de Uiteindelijke Waarheid is immers geen sprake meer, nu alles blijkt neer te komen op min of meer toepasselijke benaderingen. De "fundamentele natuurwetten" schrompelen ineen tot grove vereenvoudigingen, die met geen mogelijkheid zijn te onderscheiden van ruwe modellen zoals die worden gebezigd in de eerste de beste grofstoffelijke technische toepassing. De droom is uit. Voortaan is het onderzoek aan elementaire deeltjes van een even banaal, of hoogstaand kaliber als het begrijpen van de temperatuurverdeling in een tussenwarmtewisselaar.

Ongetwijfeld heeft het wegvallen van de illusie van exaktheid gevolgen voor het onderscheid in toekenning van financiële middelen aan de verschillende natuurwetenschappelijke disciplines. Als de zaken zo eenvoudig zouden liggen.

Op vrijdag 11 november 1994 was er in Delft een congres "Bruggen Slaan" met als thema "De oorsprong van kennis: wetenschap of mystiek?". Uitgenodigd waren de volgende sprekers: Frits Staal, Paul Davies [9], Freek de Jonge en Roger Penrose. Toevallig stond ik in de rij bij de koffie vlak naast Paul Davies. Ik moest wel van de zeldzame gelegenheid gebruik maken - daarvoor was ik eigenlijk naar het congres gekomen - en probeerde hem gericht een paar vragen te stellen. "Wat is volgens u de aard van de wiskunde: is het een kunst of is het een wetenschap?" Davies vertelde dat op de Engelse universiteiten de Wiskunde oorspronkelijk was ondergebracht bij de faculteiten voor Latijn en Grieks. Maar zijn eindkonklusie luidde toch dat de wiskunde een wetenschap is. Tweede vraag: "De wiskunde bevat sommige elementen die nooit door enig fysisch meetinstrument waargenomen kunnen worden, zoals het Oneindige. Opent het geen vat vol tegenstrijdigheden, wanneer dergelijke ideale elementen de theorie binnenkomen, om zich vervolgens, vermomd als fysische entiteiten, te manifesteren?" Het antwoord van Paul Davies vind ik buitengewoon karakteristiek: "Vermoedelijk bent u een volgeling van Brouwer. Dat is niet zo gek voor iemand die uit Nederland komt". Vrijwel in de roos, maar geen antwoord op mijn vraag. Vervolgens verdween Davies naar de VIP room, waar de koffierijen veel minder lang zijn.

In 1989 is er de geruchtmakende inaugurele rede van Lagendijk: "De arrogantie van de fysicus" [24]. In 1990 verschijnt het boek "De dingen hebben hun geheim" van A. van den Beukel [8]. (Ik dank prof. van den Beukel ook voor zijn kritische commentaar op de eerste drukproeven van

mijn eigen boek.) Men is in bescheiden kring tot het inzicht gekomen dat een aantal theoretische fysici zich inmiddels welhaast theologische pretenties aanmeet. Volgens eigen zeggen [25] is men bezig door te dringen tot "de gedachten van God". Zich bij deze onderneming gesteund wetend door hun onvermijdelijke media-vazallen, zoals Nigel Calder met zijn "Sleutel tot het heelal" [12].

Echter, niemand van de oppositie maakt echt duidelijk wat de *grondreden* is van deze aanmatigende houding. Het gelegenheidshuwelijk tussen Elementaire Deeltjes Fysika en Kosmologie doet vermoeden dat enig prestige wordt ontleend aan componenten die, wat de begeleidende techniek betreft, indrukwekkend zijn. Voor een leek belichaamd in respektievelijk de waterstofbom en de ruimtevaart. Men mag met enig cynisme stellen dat argumenten uit het recente verleden van de moderne fysika gelden als oogverblindend, oorverdovend en verpletterend. En men hoeft zich waarachtig niet kinderachtig op te stellen tegenover een exakte wetenschap die de wereld met de Eeuwige Dood bedreigt.

Nu moet niet het misverstand ontstaan dat, om een kernbom te fabriceren, zeer geavanceerde wiskundige berekeningen nodig zouden zijn. Het tegendeel is waar. Zoals het ook veel gemakkelijker is om een Molotov cocktail te maken dan om een benzinemotor te laten lopen. Dit kan men de brede weg naar het Kwaad noemen.

Ik neem de gelegenheid te baat voor twee kleine anekdotes. Levendig herinner ik me nog het moment waarop onze hoogleraar kernfysika de "vreemdheid" (Engels: strangeness) van elementaire deeltjes aan de man probeerde te brengen (dat is, grof gezegd, de manier waarop ze niet in het "systeem" passen). Men bestaat het om deze vreemdheid te definiëren als een nieuw quantumgetal. Hoongelach steeg op uit het auditorium. Dezelfde professor liet een medestudent van me voor zijn tentamen zakken omdat de vent bij wijze van grap opmerkte dat hij niet geloofde in elementaire deeltjes. Geloof, daar kwam het dus op aan! Maar deze gelovigen zijn er tot op heden niet in geslaagd om de bindings-energie van een deuterium kern, dat is hun eenvoudigste twee-deeltjes probleem, uit te rekenen [26]. De kernfysica zou als theorie zeker niet hoog scoren, ware het niet dat men in staat is met deze alchemie zulke afschrikwekkende wapens te maken.

Maar het is niet alleen de technologie. We komen terug op wat ik 20 jaar geleden aan de kaak heb proberen te stellen: de theoretische kant van het verhaal. Als één van de machtsmiddelen van de fysika geldt namelijk zeker ook de Wiskunde [13], nog *afgezien* van iedere praktische toepassing. Met name omdat zij de wiskunde tot hun beschikking hebben, daarom denken zij, deze theoretische fysici, nog een ander wapen in handen te hebben, waarmee zij iedereen om de oren kunnen slaan. Bijvoorbeeld degenen onder ons die, ondanks de zegeningen van de moderne tijd, nog in een God geloven.

Wie durft er immers te twijfelen aan opvattingen welke worden onderbouwd door exakte mathematische principes?

De tijd lijkt rijp voor een hernieuwde poging: WAAROM IS. Allang niet meer de vraag of het wel zo "zou zijn". Ik zeg daarom dat DE WISKUNDE ONWERKELIJK is. Meer dan dat: ZO onwerkelijk. Op de een of andere manier heeft de wiskunde niet veel op met de materiële werkelijkheid. Op de een of andere, doch op een *welbepaalde* manier. In het voorgaande hebben we namelijk vastgesteld:

Voorzover het aan de fysische werkelijkheid ligt, is een exakte wiskunde, die per definitie dan ook het oneindige bevat, in principe onnodig, en bovendien misleidend.

Sociologie is " $X=X$ ". Als oplossing van een algebraïsche vergelijking niet bepaald informatief. Jan Blokker mag een kolom met die inhoud in de Volkskrant publiceren. Er is niemand die hem daarvan heeft weerhouden. Men moet echter wel van zeer goeden huize komen, of onbevangen en onbevoegd zijn, om zelfs maar de mogelijkheid te durven overwegen dat ook in de natuurwetenschappelijke hoek wel eens dingen niet in de haak zouden kunnen zijn. Aureool van exaktheid, het voor de leek ontoegankelijke begripennapparaat en indrukwekkende technische (vooral de militaire) toepassingen staan borg voor een effectieve schrikdraad werking.

Mijn boek is in de allereerste plaats een poging om dit taboe te doorbreken, en *inhoudelijke* kritiek op met name het vak wiskunde überhaupt mogelijk te maken.

Doorbreken van dit taboe is niet het tarten van een natuurwet, want de wiskunde is puur mensenwerk, niets anders dan dat, al denken veel van haar beoefenaars daar anders over. Men kan zich niet meer onttrekken aan het feit dat de exakte, dat is de op wiskunde gebaseerde wetenschap, tegenwoordig op veel mensen een invloed uitoefent die te vergelijken is met die van een godsdienst. Zelfs de jeugd wordt niet gespaard. Kijk maar naar de eerste de beste uitzending van science-fiction-achtige tekenfilms als "Power Rangers" of "X men" (TeleKids).

Maar godsdienstigheid is een trend die reeds inherent is aan de wiskunde zelf. Heel treffend spreekt Preston C. Hammer ergens spottend over "The Sacred Rites of Mathematics" [10]. De arrogantie van de fysicus is een probleem van de exakte wetenschappen in het algemeen, en in het bijzonder ook een probleem van de manier waarop binnen de exakte wetenschappen een plaats aan het machtsmiddel wiskunde wordt toebedacht.

De uiteindelijke wetenschappelijke opgave van deze eeuw? Dat is wat mij betreft de definitieve ontmythologisering van de wiskunde, en daarmee een herwaardering van de "exakte" wetenschappen, de fundamentele natuurkunde voorop.

3.7 Samenvatting

0. Het oneindige bestaat in de materiële werkelijkheid niet. Alles in de wereld is eindig.
1. Er zijn half zo veel even als natuurlijke getallen.
2. De beperkte voorspelbaarheid van het weer is een principieel natuurwetenschappelijk probleem. Het weer is wezenlijk 'wisselvallig' en 'onbestendig' [17].
3. De "diepere werkelijkheid" onder de stromingsleer-wetten wordt uitgemaakt door een substraat van bewegende moleculen. En van die moleculen gaan er eerder veel dan weinig in een "infinitesimaal" volume.
4. Zowel in de randvoorwaarden als ook in de stromingsvergelijkingen *zelf* moeten fluktuaties worden verdiskonteerd. Onnauwkeurigheid en inexaktheid zijn, wat de stromingsleer aangaat, de "diepere" werkelijkheid.
5. Benoit Mandelbrot [18] is een van de zeldzame wiskundigen die grote zorg heeft besteed aan een goed woordgebruik binnen zijn theorie.
6. Alle oneindigheden in de (Klassieke en Quantum)ElektroDynamika komen voort uit extrapolatie van de theorie naar onbeperkt kleine afstanden. Ze zijn te wijten aan het kritiekloos accepteren van mathematische opvattingen met betrekking tot het continuüm.
7. Ook de naar oneindig divergerende theoretische electromagnetische massa van het elektron wordt veroorzaakt door (al te zeer) geïdealiseerde opvattingen van ruimte en tijd.
8. De geldigheid van de Lorenz-transformaties wordt fundamenteel begrensd door onnauwkeurigheden in plaats en tijd, die respectievelijk van de grootteorde 10^{-13} m en 10^{-21} s zijn. De Speciale Relativiteitstheorie gaat dus niet zonder meer op voor elementaire deeltjes.
9. Alleen al om deze reden zijn quantummechanica en de relativiteitstheorieën van Einstein principieel onverenigbaar.
10. Ook de continuümvergelijkingen van de quantummechanica dienen beschouwd te worden als ruwe benaderingen, die over een in wezen corpusculair substraat van ruimte en tijd heen worden gezet.
11. De straal van een (hemel)lichaam is altijd kleiner dan zijn Schwarzschild radius. Zwarte gaten (in strikte zin) bestaan dus niet.
12. Meer in het algemeen moet, op grond van het Axioma dat alles eindig is, het bestaan van singulariteiten in de fysica zonder meer worden ontkend.
13. Er is een (veel te grote) bovengrens voor de massa van elementaire deeltjes: de Planck massa. Daarvan afgeleid worden (veel te kleine) absolute ondergrenzen voor de granulatie van ruimte en tijd.
14. Het is niet in te zien hoe een wezenlijk onderscheid tussen de fundamentele en toegepaste natuurkunde kan worden gehandhaafd. Alle zo-

genaamde "fundamentele natuurwetten" blijken neer te komen op vereenvoudigingen, die zich slechts in graduele zin onderscheiden van ruwe modellen zoals die worden gebezigd in de eerste de beste grofstoffelijke technische toepassing.

15. De definitieve ontmythologisering van de wiskunde, gepaard gaande met een herwaardering van de "exakte" wetenschappen, de fundamentele fysica voorop. Dat is wat mij betreft de uiteindelijke wetenschappelijke opgave van deze eeuw.

3.8 Aantekeningen

0. De huidige fysika *gedooft* het leven. Met de acceptatie van een levendig continuüm zou hierin misschien verandering kunnen komen.

1. In de moderne fysika is de eenheid van lengte gedefinieerd als een (groot) aantal malen de golflengte van licht, afkomstig van een bepaalde spektraallijn van een bepaald atoom. Op analoge wijze is de eenheid van tijd gedefinieerd als een aantal malen de trillingstijd van licht, eveneens afkomstig van een bepaalde spektraallijn van een bepaald atoom. Korrekt is dus de volgende opmerking, die ik eens ergens heb gelezen: Men mat de lichtsnelheid met de lichtsnelheid, die derhalve konstant bleef.

2. Dat Einstein de grootste geleerde van deze eeuw zou zijn mag worden tegengesproken, al was het alleen maar vanwege het gegeven dat deze eeuw nog niet voorbij is.

3. De oplossing van de Dirac vergelijking voor de energie niveaus van het waterstof atoom is:

$$E = m_0 c^2 \left\{ 1 + \frac{(Z.\alpha)^2}{\left[\sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - (Z.\alpha)^2} + n \right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Hierin is: $j + \frac{1}{2} \geq 1$ en $Z = 1$, $\alpha \approx 1/137$.

Ieder atoom is in eerste benadering een waterstofatoom, op de kernlading na. Dit wordt gesimuleerd door $Z \neq 1$ te nemen. Gaan we ervan uit dat een uitdrukking onder het wortelteken positief moet zijn, dan moet dus $Z < 137$. Ik denk dat het mogelijk is om dit als volgt te interpreteren: er zijn minder dan 137 soorten atomen (stabiele elementen). Verder komt de energie E voor in een fasefactor van de oplossing, namelijk als $\exp(i \frac{E}{\hbar} t)$. Laten we de beperking $Z < 137$ vallen, dan betekent dit dat de fasefactor voor nog grotere kernladingen een reëel negatief deel krijgt in de exponent. Hetgeen weer zou betekenen dat bij zware elementen exponentieel verval optreedt. De konklusie is: dat ook zonder de hypothese van een atoom" kern"

verklaard kan worden dat er ruwweg minder dan 137 elementen zijn, en dat bij zware elementen radioactief verval optreedt. Geen onbevredigend resultaat, als men de grofheid van de waterstof benadering in aanmerking neemt.

4. Wanneer de astronomische wetenschap niet eens in staat blijkt de helderheid van een komeet (1973-f Kohoutek) bij benadering te voorspellen, dan is, wanneer het gaat om theorieën betreffende neutronensterren, quasars en zwarte gaten, een dosis skepsis gewettigd. In het bijzonder bij het poneren van theorieën over het ontstaan van het heelal zou het verstandig zijn een grotere mate van terughoudendheid en bescheidenheid in acht te nemen.

5. De dunne stoflaag op onze eigen maan is een argument voor de onjuistheid van evolutietheorie op het punt van de tijdschaal.

6. Het feit dat in een vierhonderd jaar oude opgraving (Keldermanspoort, Hulst) druipstenen werden aangetroffen van een meter lengte, bewijst dat druipstenen gevormd kunnen worden in een kortere tijd dan gewoonlijk wordt aangenomen.

7. Wanneer men zich realiseert dat de ontwikkeling van de moderne wetenschap en techniek zich uitstrekken over een periode van zo'n krappe driehonderd jaar, dan kan men licht inzien dat extrapolatie van onze huidige kennis naar zeg het jaar 3000 een uiterst hachelijke onderneming is.

8. Uitspraken over de wetenschappelijke onmogelijkheid van UFO's, uitgaande van de tegenwoordige inzichten, en aangenomen dat we hier te maken kunnen hebben met beschavingen die de onze duizenden jaren vooruit zijn, kan berusten op niets anders dan zelfoverschatting.

9. De godsdienst heeft evenveel wetenschappelijke kenmerken als de wetenschap godsdienstige kenmerken heeft.

10. Het is niet verkeerd om het Bijbelse scheppingsverhaal (boek Genesis) op te nemen als een ruwe benadering van het werkelijke gebeuren. Vermits opgevat met de nodige souplesse, bestaan er opmerkelijke overeenkomsten met moderne wetenschappelijke inzichten, zelfs met de Big Bang theorie. Hierbij denkt men onwillekeurig aan de zinsnede uit Genesis: "Er zij licht".

11. Volgens sommigen van onze geleerden zou het heelal ontstaan kunnen zijn uit een "quantum fluctuatie". Komen we er allemaal even bij staan: sommigen menen zelfs dat het heelal ontstaan zou zijn uit een wiskundige *singulariteit*.

Hoofdstuk 4

FUNKTIONEREN

Alle maatschappelijke en natuurlijke processen zijn het werken van de materie zelf. De elementaire vorm van dit werken wordt mathematisch tot uitdrukking gebracht in het functiebegrip. Ons onderzoek wordt daarom vervolgd met een grondige analyse van wat een functie in werkelijkheid is.

4.1 De arbeid

Bij het woord "functie", letterlijk betekend "verrichting" (: latijn), moet men allereerst denken aan werken, aan wat een konkrete levende mens echt doet. De meest elementaire menselijke functie bestaat inderdaad uit het met zijn lichaam bewerken van tastbaar materiaal. In de eerste plaats daadwerkelijk handelen, dingen letterlijk onder handen nemen. Kortom: arbeid.

In deze zin is het arbeidsproces reeds geanalyseerd, en wel door Karl Marx, in "Das Kapital" [27]. Maar wij willen niet alleen maatschappelijke, doch ook natuurlijke processen onder dit ene gezichtspunt, dat wil zeggen als materiële werkelijkheid samenvatten.

Iedere verrichting brengt veranderingen teweeg in materie welke haar wordt aangeboden. Breien verandert wol in een trui; zagen verandert een boomstam in planken; zien verandert licht in zenuwpulsen; beweging verandert het geheel van voorwerp en omgeving; rekenen verandert getallen in andere getallen. Pas door het verwerken van materie wordt een functie werkzaam, is zij werk-elijk. Het arbeidsproces vindt dus plaats in de volgende vormverandering (steeds kan ter vergelijking hiernaast een passage uit "Das Kapital" worden gelegd):

$$Materie - Arbeid - Materie$$

Of kortweg: $M - A - M$.

Het resultaat van het proces is, puur materieel beschouwd, de beweging $M - M$; dat is meteen de grondslag van het klassieke wiskundige funktiebegrip. Maar laat ons eerst het onverminkte arbeidsproces nader beschouwen.

$M - A$. Eerste fase van de arbeid, analyse van materie.

De arbeid verbruikt zijn stoffelijke elementen (voorwerp en middel), verteert hen en derhalve is het een konsumptieproces. Gedefinieerd door de wijze waarop zij materiaal verandert en vervormt, kan er geen funktie bestaan zonder de aanwezigheid van (ver)bruikbare grondstoffen. Een gloeilamp zal geen licht kunnen geven zonder stroom te verbruiken.

Maar de arbeid is niet louter konsumptie, het verwerkte materiaal niet alleen maar gebruiksartikel. Beschouwt men het gehele proces vanuit het resultaat, het produkt, dan blijkt iedere verrichting tevens produktie te zijn, voortbrengen van iets anders, produktieve arbeid dus.

$A - M$. Tweede fase van de arbeid. Synthese van materie.

Samenvoegen en scheiden zijn de enige elementen die de menselijke geest bij de analyse van het arbeidsproces uiteindelijk kan waarnemen.

Stukken metaal gaan onder een draaibank, teneinde in de gewenste vorm te worden gebracht. De draaibank verbruikt elektriciteit. De mens die aan de machine staat heeft om te kunnen werken voedsel, kleding en onderdak nodig. Aan de andere kant zijn beide, zowel de draaibank als de werkman, onderhevig aan slijtage. Na enige tijd gaat de machine naar de sloop, en de machinebankwerker met pensioen. Mensen en machines verslijten tijdens hun leven en werken. Ze eten als het ware zichzelf op door iedere keer een stukje van het eigen lichaam over te dragen op de stoffen die ze bewerken. Aangetast door het vuur van de arbeid worden zij verteerd als vormingselementen van nieuwe produkten. Daarom ook worden kosten van afschrijving verrekend in de prijs van een produkt. De funktie van het draaien van metalen onderdelen moet volledigheidshalve dus beschreven worden door:

$arbeider + draaibank + voeding\ en\ onderhoud + ruw\ materiaal \rightarrow$

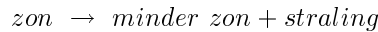
$vermoeide\ arbeider + gesleten\ draaibank + beider\ afval + produkt$

Een beschrijving als: $ruw\ materiaal \rightarrow bewerkt\ materiaal$ is onvolledig: arbeider en arbeidsmiddel behoren eveneens gerekend te worden tot de grondstoffen van een verrichting; een deel van de produktie is louter slijtage. Dit bijprodukt is welhaast onvermijdelijk. Iedere funktie heeft zo zijn afvalprobleem.

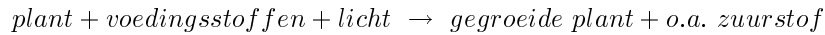
Kan het bij de fabrikage van spullen nog wel de schijn wekken alsof de werking geheel en al uitgaat van de machine en degene die hem bedient; kijken we naar de vrije natuur, dan wordt weldra duidelijk dat hier sprake

moet zijn van enig gezichtsbedrog. De kosmos is waarachtig niet gezegend met een onveranderlijke Bewerker in de zin van Aristoteles. Zelfs God is moe geworden van het arbeiden; als men de Bijbel mag geloven "rustte Hij op de zevende dag van al het werk".

De zon straalt warmte uit, zij produceert warmtestraling. Toch wordt door de zonnemassa geen brandstof opgenomen van buitenaf. De grondstof voor de straling wordt gevormd door de materie van het zonnelichaam zelf. De zon kan alleen maar schijnen doordat ze zichzelf als het ware opsoupeert:

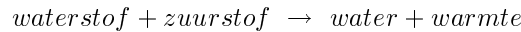


Bij levende wezens loopt het precies andersom. Een plant neemt water en zouten op uit de grond, licht en kooldioxide uit de atmosfeer, en stelt deze stoffen samen tot produkten die voor een groot gedeelte opgenomen worden in het eigen lichaam. In feite produceert de plant hiermee voortdurend zichzelf terug:

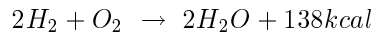


Het produkt van de individuele consumptie is de consument zelf.

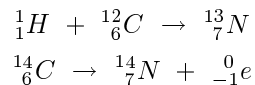
Het allerduidelijkst zien we de werkingen van de materie gedemonstreerd in de scheikunde; de reactievergelijkingen van de chemie bewijzen ons dat slechts de inwerking van materie op zichzelf wezenlijk is voor funkties. In plaats van de werkmans en zijn machine, beide voorzien van hulp- en grondstoffen, treedt nog slechts naar voren de wederkerige interactie. Bijvoorbeeld:



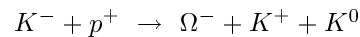
Of nauwkeuriger, in de taal van de scheikunde zelf:



De produktie van water uit waterstof en zuurstof geschiedt inderdaad zonder tussenkomst van derden; de grondstoffen reageren met elkaar "op eigen kracht". Ook in de kernfysika kent men deze "vanzelf verlopende" arbeidsprocessen:



En het "omega minus" deeltje zou gedetekteerd zijn dank zij het volgende produktieproces:



In zijn "Fysika" maakt Aristoteles expliciet onderscheid tussen natuurlijke en kunstmatige verandering. Hij ziet daarbij over het hoofd dat de maker,

in wie de verandering zijn bron heeft, door te arbeiden: ook zichzelf bearbeidt. In een maatschappij als de Griekse, die immers gebaseerd was op slavenarbeid, kon men gemakkelijk blind zijn voor dit feit. Overigens is de knappe analyse van Aristoteles eerst veel later overtroffen.

We zijn uitgegaan van het arbeidsproces, zoals zich dat dagelijks voltrekt in onze fabrieken. De materiële produktie binnen de menselijke samenleving was en is ons uitgangspunt. Maar als vanzelf moesten we daardoor ook arbeidsprocessen in aanmerking nemen die werkzaam zijn buiten het menselijk handelen om: alle biologische, chemische en fysische processen. Een strikt onderscheid tussen natuurlijk en kunstmatig is ons zodoende ontvallen, op puur empirische gronden. Een dergelijk onderscheid viel overigens met het voortschrijden van de techniek steeds moeilijker vol te houden. Het is lang geleden dat de natuurkunde kennis van de natuur was en geen technische fysika.

Maar opheffing van dit onderscheid heeft grotere konsekventies dan op het eerste gezicht mocht lijken; want door de scheiding tussen natuurlijke en maatschappelijke werkelijkheid op te heffen, valt in feite het hele onderscheid weg. Wederom blijkt: onze cultuur is niet anders dan natuur, voortgezet op een ander niveau. Er is zonder de mensen geen voortbestaan van de natuur op deze planeet denkbaar, omdat natuur en cultuur onlosmakelijk met elkaar verbonden zijn. Een film als "de Apenplaneet" suggereert dus de grootst denkbare leugen, symptomatisch voor het ontlopen van onze eindverantwoordelijkheid als mensen. Het idee als zouden andere primaten, ingeval van menselijk falen, de leiding van de evolutie kunnen overnemen, is vals. Deze boude stelling hier ter plekke onderbouwen zou ons echter te ver weg voeren. In plaats daarvan refereer ik (wederom) nadrukkelijk naar het prachtige boek van Pierre Teilhard de Chardin [5]. Best kans overigens dat de reguliere boekhandel momenteel 'nee' verkoopt.

4.2 Causaliteit

Wanneer ook van "kunstmatige" verandering de bewegingsbron gezocht moet worden binnen de veranderende materie zelf, dan moet men hieruit wel konkluderen dat de grondstoffen die in een arbeidsproces worden opgenomen bovendien de enige OORZAAK zijn van dit arbeidsproces. Inderdaad lijkt dit een juiste manier van spreken: wat zou "oorzaak" in de letterlijke zin van het woord anders moeten betekenen dan "oer-zaak" oftewel grond-stof. In de "Fysika" van Aristoteles lezen wij dan ook "dat hetgene waaruit als een bestanddeel een ding ontstaat een oorzaak wordt genoemd". Oorzaken zijn dus, materieel gezien, niets anders dan de ene kant van het arbeidsproces: $M-$.

De oorzaak wordt echter als vanzelf gevolgd door het tegenovergestelde: $-M$. Produkten zijn inderdaad het automatische GEVOLG van de veroorzakende arbeid. De hier gemaakte abstraktie leidt tot het uiteenplaatsen van grondstof en produkt, wat precies hetzelfde is als scheiding tussen oorzaak en gevolg, als we een analyse maken van, het mes zetten in, de arbeid als continue beweging.

Het aanbrengen van dit onderscheid betekent echter nog meer. Het is ook een uiteenplaatsen van de momenten $M-$ en $-M$ in sequentiële zin, dat wil zeggen in de tijd. Want eerst moet $M-$ gekonsumeerd worden, pas daarna kan $-M$ worden geproduceerd. Heel letterlijk is $-M$ het ge-volg van $M-$.

Funkties onderscheiden zich van elkaar in de eerste plaats naar de vormverandering van de materiële bestanddelen. Een chemische reactie is anders dan een computerberekening omdat de deelnemende stoffen in beide gevallen verschillend zijn. Klaarblijkelijk wordt de kwaliteit, de hoedanigheid van de arbeid gedefinieerd door zijn tastbare componenten, de beide uitersten: oorzaak en gevolg.

Maar wat blijft er over wanneer wij grondstof en produkt uit de arbeid hebben weggenomen, wanneer men het stoffelijke deel letterlijk heeft geabstraheerd, uit-getrokken en verwijderd? Er is niets anders overgebleven dan dezelfde spookachtige inhoud, een loutere gelei van niet van elkaar te onderscheiden arbeid, dat wil zeggen besteding van arbeidskracht zonder dat wordt gelet op de vorm van die besteding. Wat wij hebben overgehouden is abstracte arbeid, arbeiden zonder materie, immaterieel functioneren, niets doen, No OPERATION. Deze arbeid, beroofd van zijn kwalitatieve materiële bestanddelen, geven wij de naam: TIJD of DUUR. Zij is tevens heel het kwantitatieve aspect van ieder arbeidsproces. De hoeveelheid van de arbeid wordt gemeten door de tijdsduur.

Het resultaat van onze analyse is tweeledig. Aan de ene kant splitsen we de arbeid $M - A - M$ in oorzaak en gevolg. Dit is de materiële zijde van het functioneren, de kwaliteit $M - M$. Deze analyse impliceert aan de andere kant een hoeveelheid abstracte arbeid, een tijdsduur tussen grondstof en produkt. Dit is de immateriële zijde van het functioneren, de kwantiteit $-A-$.

Wezenlijk voor de tijd is dat zij oorzaak en gevolg, in die volgorde, van elkaar onderscheidt. Wezenlijk voor de causaliteit is dat oorzaak en gevolg van elkaar gescheiden worden door een positieve tijdsduur, en dat is weer niets anders dan de prijs die men moet betalen voor iedere vorm van arbeid. Het causaliteitsbeginsel impliceert dus geen "voorspelbaarheid", doch gaat slechts uit van de oorspronkelijke betekenis: dat een produkt er simpelweg niet eerder kan zijn dan de grondstof. De causaliteit schenkt aan de tijd op deze weinig diepzinnige wijze een richting, haar "pijl" naar de toekomst.

Er zijn heel wat dikke boeken volgeschreven over het schier ondoorgrondelijke mysterie van oorzaak en gevolg. Reeds het feit dat iedere hooggeleerde in deze kwestie zonodig weer een andere opvatting moet huldigen, laat al zien dat het probleem als zodanig onopgelost is. Als er veel geneesmiddelen bestaan tegen verkoudheid, dan zijn ze geen van alle afdoende. De gemakkelijkste uitweg is natuurlijk het bestaan van een ongeneeslijke ziekte zonder meer te ontkennen, op dezelfde manier als Logisch Positivisten de kwestie van oorzaak en gevolg als een schijnprobleem van de hand doen. Dezelfde filosofen hebben zich echter heel wat (vergeefse) moeite getroost om het - causale !? - "als ... dan ..." van de omgangstaal te persen in het armzalige stramien van (hun opvatting van) de Mathematische Logica [28].

Een simpele ethymologische beschouwing - ook al geen vaste gewoonte van exakte wetenschappers - had de methodologen zeker suggesties in de goede richting op kunnen leveren. Duidt "gevolg" soms niet op een sequentie in de tijd ? En wat zou "oorzaak" anders moeten betekenen dan oer-ding of grond-stof ? Wij moeten het geheim van de oorzakelijkheid zoeken in de sfeer der materiële produktie, dat is eigenlijk op het eerste gezicht al duidelijk.

Maar hiermee is tevens verklaard waarom causaliteit voor heel veel theoretici wel een schier onoverkomelijk vraagstuk zijn en blijven moet. Scheiding tussen hoofd en handen draagt er nu eenmaal niet toe bij om oplossing te zoeken waar hij te vinden is, namelijk in de werkelijkheid van konkrete levende arbeid. Immers, de arbeid adelt, maar de adel arbeidt niet.

De gangbare wiskunde maakt er inderdaad een gewoonte van om iedere poging tot analyse van de materiële praktijk door te verwijzen naar obscure vakgebieden als "empirische psychologie" of "heuristiek". Daarmee denkt men er gemakkelijk vanaf te komen. Van de wiskundige mag niet worden verwacht dat hij zijn handen vuil zouden willen maken, al was het dan alleen maar in abstrakto. Door deze afkerigheid van het stoffelijke leven ontvalt de mathematische intellektueel iedere werkelijk wetenschappelijke basis. De geest is alleen waarachtig als hij handelt, iets wat onze geleerden voor een vernederende bezigheid houden [29].

Het zal nu duidelijk zijn dat een juiste opvatting van oorzaak en gevolg staat of valt met een werkelijkheidsgetrouw begrip van wat funktioneren in het leven van alledag betekent. Het is precies op dit punt dat de "klassieke" wiskunde ernstig tekort schiet: door funkties alleen nog maar te willen zien als starre "afbeeldingen" werd iedere vorm van oorzakelijkheid weggeabstraheerd uit het formalisme, om er niet anders dan gekunsteld en verdraaid in terug te keren. Terug te keren, inderdaad. Want natuurlijk zal deze kortzichtigheid zich snel wreken, in de eerste de beste grofstoffelijke toepassing.

4.3 Werkelijk waar

Ziet men nu van de gebruikswaarden der warenlichamen af, dan bezitten zij nog maar één eigenschap, namelijk dat zij arbeidsprodukten zijn, voortbrengselen van arbeid. Iedere waar moet werkelijk geproduceerd worden; elke waarheid is noodzakelijkerwijs produkt van (al dan niet geïdealiseerde) werkzaamheden. Dit is een maatschappelijk vaststaand feit. Het is ook het konstruktivistische standpunt; het konstruktivisme is een belangrijke stroming binnen de wiskunde. Maar dat al wat waar is produkt moet zijn van arbeid, zo'n beginsel vindt pas volledige rechtvaardiging als het mede bevestigd, althans niet ontkend wordt, door de huidige natuurwetenschap.

Men zegt: alles heeft een oorzaak. Een zegswijze die op zich nu duidelijk is. Hier staat namelijk gewoon dat alle waarheid ooit geproduceerd is (gevolg), voortgebracht door inwerking van bepaalde grondstoffen (oorzaken) op elkaar. Het aldus geformuleerde causaliteitsbeginsel is dan ook een aanwijzing voor het produkt zijn van willekeurige waarden. Een en ander zou met name betekenen dat er geen werkelijke grond-oorzaken bestaan. Het is dus vruchteloos om te zoeken naar absolute "first principles" of echte "elementaire deeltjes", waaruit alle materiaal opgebouwd zou zijn. Reden te meer om straks het elementair gelijk van de verzamelingenleer aan een nader onderzoek te onderwerpen.

Laten we nu de andere kant bekijken, want tenslotte kan geen enkel ding waarde bezitten zonder gebruikswaarde te zijn. Door de nuttigheid verkrijgt het ding een gebruikswaarde. Gebruikswaarde verwezenlijkt zich pas in het gebruik of in de consumptie. Een produkt heeft pas waarde, het realiseert zich pas als zijnde echt "waar" wanneer men reeds bezig is dit produkt te consumeren. Een appel is, als vrucht van de appelboom, pas echt waar wanneer hij wordt opgegeten. In het Nederlands wordt wel de volgende nuchtere uitdrukking gebruikt, wanneer iemand denkt de ander te kunnen overbluffen met een nogal theoretische uiteenzetting: "Kun je dat eten?".

Zouden er produkten kunnen bestaan die helemaal nergens een oorzaak van zijn? Probeert men zich dat voor te stellen. Zo'n voortbrengsel zou om te beginnen onzichtbaar moeten zijn: het zou geen licht kunnen absorberen of weerkaatsen. Interaktie met licht veronderstelt namelijk dat een objekt veranderingen kan ondergaan en opgenomen wordt in een fysisch proces: uitwisseling van fotonen. Maar we hebben juist verondersteld dat het objekt in kwestie niet, als oorzaak, deelneemt in zulke processen. Evenmin zou enig mens in staat zijn het ding te betasten, want in kontakt gebracht met iemands vingertoppen, of enig apparaat in het verlengde daarvan, zou het niet meedoen in een proces van wederzijds vervormen, om op deze wijze een druksignaal voor de hersenen te produceren. Met andere woorden: het

"ding" zou, geheel en al buiten onze ervaringswereld, een vreemd soort existentie moeten bezitten. Nuchtere mensen zeggen dan dat zo iets eenvoudig niet bestaat.

Alle dingen vinden hun oorsprong in iets anders en zijn de oorsprong van iets anders. Het vormt de gondslog van onze mogelijkheid om de natuur verstandelijk te begrijpen [7].

Er kunnen dus geen gevolgen bestaan die niet tegelijk weer oorzaak zijn van de een of andere funktie, van welke aard deze verrichting ook moge zijn. Of er is geen enkel produkt dat niet op een of andere manier weer opnieuw grondstof is. Derhalve produceert iedere arbeid grondstof voor andere arbeidsprocessen, elke arbeid veroorzaakt nieuwe arbeid. Deze gevolgtrekking wordt bevestigd door een uitspraak over het produkt van de maatschappelijke arbeid. Wanneer het produkt nutteloos is, is ook de erin vervatte arbeid nutteloos, geldt niet als arbeid, en vormt derhalve geen waarde. Merk hierbij op dat "nutteloos" in werkelijkheid betekent "niet te nuttigen" ofwel niet konsumeerbaar. Er kan in de maatschappij geen arbeid bestaan die nutte-loze produkten levert; ieder produkt is nuttig in de meest letterlijke zin van het woord, daarom noodzakelijk ook weer grondstof voor andere funkties. Anders "bestaat" het niet, of is het niet(s) waar(d).

Dit alles vindt zijn direkte uitdrukking in het gezegde dat alle oorzaken en alle gevolgen "waar" zijn. Immers iedere waar moet een produkt zijn, maar alle produkten zijn ook weer grondstof. De waar zelf kan dus niets anders zijn dan eenheid van grondstof en produkt, samenvatting van oorzaak en gevolg. Alle waar ofwel iedere waarheid is dus opgebouwd uit twee tegengestelde polen: gevolg aan de ene kant, oorzaak aan de andere kant. Behalve het werken is ook de waar eenheid van oorzaak en gevolg. Terwijl echter het werken begint met de konsumptie van iets, neemt het bestaan van de waar een aanvang met geproduceerd te zijn. Dat is de ene pool. Inderdaad is de waar een produkt, voortbrengsel van arbeid. Maar dit produkt is onmiddellijk voorbestemd om, hoe dan ook, weer opnieuw te worden gekonsumeerd. Dat is de andere pool. Wij zien nu gemakkelijk hoe de waar is opgebouwd, op welke wijze oorzaak en gevolg met elkaar verbonden zijn, tot de waarheid als zodanig:

$$A - M - A$$

Tussen twee arbeidsprocessen $A-$ en $-A$ bestaat $-M-$ als waar. Waarheid is dus geen statisch gegeven; iedere waar is een dynamisch ogenblik, een knooppunt als het ware van verschillende werkingen. Al wat waar is, is "werkelijk" waar.

Is het dus waar dat iedere werkelijke scheiding tussen waarnemen en waarmaken praktisch onmogelijk is, toch spreekt men bij experimenteel

werk uitsluitend over "waarnemingen doen". Hier kan echter in het geheel geen sprake zijn van een echte tegenspraak, want we hebben de eenheid van konsumptie en produktie duidelijk genoeg vastgesteld. Zonder een waar ter hand te nemen, dat wil zeggen zonder een waar-neming te doen, kan er niet gewerkt worden, kan er geen waar gemaakt worden uit het waargenomene. Ook het omgekeerde geldt echter, namelijk dat iedere waarneming tot uitdrukking komt in een werking, pas door het waar-maken van iets anders kenbaar wordt. Zo zal een stroomsterkte niet waarneembaar zijn wanneer zij niet wordt omgezet in bijvoorbeeld de uitslag van een meter. Evenmin kan licht worden waargenomen zonder dat licht te verwerken tot bijvoorbeeld zwarting van een fotografische plaat. Datgene wat men wenst waar te nemen kan dus slechts waargenomen worden door het tevens te bewerken, te vervormen tot een andere waar. Iedere waarneming betekent dus "verstoring" van het waargenomene. Er is een ontwikkeling van de Quantum-Mechanika nodig geweest om ons bewust te maken van dit merkwaardige, doch alledaagse feit.

Tot de zaken waar onze tijd zich wel het minst om bekommert, behoort ook de betekenis van onze woorden. Een maar enigszins methodisch denken zou zich dus tot eerste taak kunnen stellen een nieuw lexicon te vervaardigen, dat handelde over de oorsprong van onze woorden. De ethymologie zou inderdaad een van de meest revolutionaire wetenschappen van de eeuw kunnen zijn [29]. Waarschijnlijk niet voor niets, laat het Nederlands een gemeenschappelijke wortel zien in allerlei woorden, die ogenschijnlijk weinig of geen verband met elkaar houden: "gewrocht", "vrucht", "arbeid", "werken", "werkelijk", "waarde" "eetwaar", "waarnemen", "waarheid". Typerend is ook de frequent voorkomende samenstelling "werkelijk waar", om uit te drukken dat iets "echt" waar is. We zien de stam "w-r", "v-r" (: oerkreet van de zwoegende mens ?) trouwens op precies dezelfde manier functioneren in het Frans en Engels: "ouvrier", "vrai", "verite", "valeur" en "value", "work", "worth".

4.4 Historisme

Bij onze analyse van het functioneren zijn wij expliciet uitgegaan van het konkrete, materiële arbeidsproces. Onze abstraktie is van puur fysische aard; ze is met de grootst mogelijke zorg gedestilleerd uit de werkelijke ervaring.

Maar ook de wiskunde moet zich niet verbeelden dat haar functiebegrip louter ontsproten zou zijn aan het menselijk denkvermogen. Dat is een misverstand.

Bekend is dat verlichte intellectuelen van de zeventiende eeuw een buitenge-

wone belangstelling aan de dag legden voor het werk van de ambachtsman. Op allerlei mogelijke manieren trachtte men lering te trekken uit de door arbeid verkregen ervaring der werkende mensen. Niet uit pure "liefhebberij" overigens, want de opkomende burgerij had goede economische motieven om zich van de ambachtelijke praktijk meester te maken. Met de opkomst van arbeidsdeling in de manufactuur ontstond de mogelijkheid, en tevens de noodzaak, om praktische ervaring op een systematische, winstgevende wijze uit te buiten. Door wederzijdse bevruchting van arbeid en intellect kon de kiem van een nieuwe orde krachtig genoeg worden om zich te ontwikkelen. Het is bepaald geen toeval dat de omwenteling van de middeleeuwse maatschappij samenvalt met de geboorte van de moderne wetenschap en technologie.

Theoretische ontleding van het funktiebegrup is historisch eerst mogelijk geworden in het begin van de achttiende eeuw. In de eerste plaats valt de analyse van het produktieproces in zijn afzonderlijke fasen samen met de differentiatie van ambachtelijke bezigheid in verschillende deelbewerkingen. Eerst dank zij de ontwikkeling van eenvoudige, gesimplificeerde functies in de sfeer der materiële produktie, kon het funktiebegrup als zodanig doorschouwd worden, en wiskundig geformuleerd. De eerste mathematische definitie schijnt gegeven te zijn door G.W. Leibnitz, als aanzet tot zijn differentiaalrekening. De bekende notatie $y = f(x)$ treft men voor het eerst aan bij A.C. Clairhaut en Leonhard Euler [30]. We schrijven 1748.

Het abstrakte begrup van een mathematische funktie wordt door geschiedkundigen gewoonlijk toegekent aan G. Lejeune Dirichlet, die in 1837 daartoe werd gebracht door een studie van Fourier reeksen. Door Frege (1879) werden functies bevrijd van de beperking dat x en y getallen moeten zijn. Er kwamen functies waarin de variabelen x en y ware of valse "proposities" ("volzinnen") voorstellen. Spoedig daarop dienden nog weer andere objekten zich aan: de verzamelingen van Georg Cantor.

Ook revoluties in het mathematisch denken dient men te plaatsen in de kontekst van het maatschappelijk gebeuren. Immers, hoe kan iemand op de gedachte komen dat maar liefst de hele wiskunde uit Verzamelingen is opgebouwd, wanneer niet de samenleving zelf haar rijkdommen heeft geaccumuleerd tot enorme kollekties, ja wanneer niet de maatschappij als geheel de gedaante heeft aangenomen van een kolossale opeenhoping van waren. Inderdaad heeft het ontstaan van de wiskundige verzamelingenleer haar maatschappelijke parallel in de gigantische samenvoeging van goederen welke de overgang naar het monopoliekapitalisme markeren. Ook het milieu waarin Georg Cantor zelf opgroeide zal niet vreemd zijn aan dit inzicht. Cantor, de grondlegger van de verzamelingenleer, is uit een koopmansgezin afkomstig. En zijn "Mengenlehre" dateert van omstreeks 1900. De hardnekkigheid waarmee de verzamelingenleer stand houdt, ondanks

haar falen op alle denkbare fronten, kan redelijkerwijs alleen maar worden verklaard door het feit dat zij de mathematische verwoording bij uitstek is van Ideeën die nodig zijn om ons maatschappelijk bestel, ten koste van alles, in stand te houden.

Was in achttiende eeuwse opvattingen de dialektiek van het functioneren nog wel enigszins te herkennen, in de verzamelingstheoretische definitie ging zij geheel en al verloren. Wel begrijpelijk voor de wetenschap van een elite die slechts rekent in termen van investering en opbrengst: Domein en Bereik van functies. Natuurlijk is het niet de grootste interesse van een ondernemer dat er ook nog *gewerkt* moet worden om de ene berg waren in de andere te transformeren. Deze belangstelling kan men daarom ook moeilijk nog verwachten bij zijn eigen wetenschappelijk personeel. Geen enkele aanduiding dus meer van het feit dat de ene verzameling eerst uit de andere geproduceerd moet worden, en dat zoiets gepaard gaat met arbeid, uitgestrekt in een zekere spanne tijds.

Het "klassieke" functiebegrip is inderdaad volkomen statisch van opzet: nergens komt de hinderlijke faktor tijd nog ter sprake. Buitengewoon typerend voor de denkwijze van de moderne ondernemer is dat men zelfs het werken als zodanig zou willen ontkennen, door de waardevormende functie van de arbeid terug te brengen tot niets meer dan een reeds bestaande relatie, welke slechts aan bepaalde eisen van zekerheid voldoet. Bij elke waarde uit het grondstoffendomein hoort in ieder geval een waarde uit het produktenbereik. Wij rekapituleren volledigheidshalve de klassieke definitie, geformuleerd volgens [31]:

Een afbeelding of "functie" F van een verzameling A in een verzameling B is een bepaalde deelverzameling van het Cartesische produkt $F \subset A \times B$, dat wil zeggen een relatie tussen A en B , met de eigenschap:

$$\forall a \in A \exists! b \in B [(a, b) \in F]$$

Bij iedere a element van A bestaat er precies één b element van B , zodanig dat (a, b) element is van F .

Het hoeft bepaald geen verwondering te wekken wanneer deze zeer onzorgvuldige, vooringenomen wijze van abstraheren vroeg of laat aanleiding geeft tot grove theoretische onvolkomenheden, met belabberde konsekwenties voor de praktijk. Veel paradoxen van het formalistische systeem zijn eigenlijk niets anders dan een idealistische weerspiegeling van de kijk die "zakenmensen" nu eenmaal op natuur en maatschappij hebben, en missen daarom elk wetenschappelijk gewicht. We zullen als illustratief voorbeeld straks behandelen het "probleem" van tijd en geld.

Rond 1910 begint de situatie werkelijk interessant te worden. Op het toneel van de wiskunde verschijnt niemand minder dan de (geïdealiseerde)

hoofdarbeider in eigen persoon: het "kreatieve subjezt" van de intuïtionisten. Naarmate het funktiebegrif verder aan de werkelijkheid wordt ontrukkt, moet de polarisatie tussen waar en werken uitgroeien tot een openlijke en uiterlijke tegenstelling.

Het formalisme vertegenwoordigt de ene pool, het intuïtionisme de andere. De formalist gaat ervan uit dat wiskundige goederen er zonder meer "zijn". Hij hoeft ze alleen maar als zodanig in beslag te nemen, en dat doet hij door ze met een "bewijs" op hun waarde te taxeren. De intuïtionist ziet in dat ook wiskundige waarheden niet zonder meer "aanwezig zijn". Men zal ze eerst op de een of andere manier moeten scheppen. Het kreatieve subjezt produceert metterdaad zijn eigen wiskunde, in een geestelijk arbeidsproces dat werkelijk, in de tijd, verloopt. Men ziet hoe het konflikt tussen "de kikker en de muis" (: Albert Einstein over het verschil van inzicht tussen de formalist Hilbert en de intuïtionist Brouwer) wellicht meer behelst dan een vrijblijvende, puur mathematische kontroverse.

Marx beweerde de kennistheorie van Hegel "op zijn kop te zetten". Dit betekende een omslag van idealisme in materialisme, waarbij de dialektiek behouden bleef. Zo ook met het intuïtionisme van Brouwer, een stroming die het - reeds aan de klassieke wiskunde immanente - idealisme tot in zijn uiterste konsekwenties heeft doorgetrokken [2].

Brouwer zegt letterlijk: "Niet alleen bestaat de wiskunde onafhankelijk van alle ervaring, maar ook bestaat alle ervaring onafhankelijk van alle wiskunde." Door dit extreem idealistische standpunt in te nemen heeft de beweging op haar beurt geprovoceerd tot een reaktie, de weg geëffend voor haar materialistische tegenpool. Men hoeft de gekwote stelling maar op zijn kop te zetten om daarmee een standpunt te krijgen dat vrij nauwkeurig de inhoud van dit boek samenvat. Vermits met de beide benen op de grond gezet, verschilt het "kreatieve subjezt" van Brouwer niet wezenlijk van een mens die zijn werk doet. De intuïtionistische wiskunde is weliswaar een fata morgana, maar dient desondanks te worden gezien als een uiterst *getrouwe* luchtspiegeling van een stuk realiteitszin, dat van oudsher ten grondslag ligt aan het vak.

De laatste belangrijke uitbreiding van het funktiebegrif, voorzover ik dat heb kunnen nagaan, is afkomstig van Alonzo Church (1951). Church huldigt in al zijn werk de konsekwente, en mijns inziens ook enig juiste opvatting, dat funkties "operaties" zijn. De Lambda Calculus van Church is qua opzet zelfs een poging om de gehele wiskunde te baseren op Funkties, in plaats van op Verzamelingen. Een verworvenheid van het systeem van Church is bijvoorbeeld dat funkties ook op zichzelf kunnen inwerken, iets wat in het verzamelingstheoretische stramien niet of slechts op gekunstelde wijze mogelijk is. De Lambda Calculus heeft een aantal praktische konsekwenties gehad voor de diverse programmeertalen. In de computertaal

LISP komt een LAMBDA operator zelfs expliciet voor [16] [32]. Lambda definieerbare functies zijn exakt dezelfde als die berekenbaar zijn met zogenaamde Turing machines, zoals is aangetoond door Turing en Kleene in 1937. Eenvoudig gezegd komt het erop neer dat iedere functie die op een ("ideale") computer kan worden berekend ook een plaats heeft in het systeem van Church, en omgekeerd. Een waardevolle concurrerende visie, die overigens qua aantal aanhangers veruit in de minderheid is. Een mogelijke verklaring voor het relatief geringe succes van Alonzo Church is dat het betoog van zijn volgelingen al te vaak verdrinkt in "syntax par excellence" ritueel, dat onvoldoende zeggingskracht naar buiten heeft.

Kon in het kader van de formalisten een uitgekleed en verminkt functiebegrip op zijn plaats zijn, de opkomst van een computerindustrie zou de wiskunde vroeg of laat met de neus op de feiten drukken. "Moeten functies direkt en volledig deel uitmaken van relaties? Dat denk ik niet"; aldus een hoogleraar in de Computer Science. Maar in plaats van tot een kritische herformulering te komen van het functiebegrip als zodanig, wat nog relatief eenvoudig geweest zou zijn, gingen de wiskundigen over tot het definiëren van een hele menigte "nieuwe" begrippen. Elke definitie moest weer een ander aspect benadrukken van een en hetzelfde arbeidsproces, zonder het overigens in zijn geheel te vatten. Ik noem enkele termen die vrijwel syoniem zijn: functie (uiteraard), (differentiaal)operator, afbeelding, dynamisch systeem, Turing-machine, (Markov) algoritmen, produkties (van Post), en zelfs: berekening, redenering. In de Informatica zelf maakt men het al even bont: function, subroutine, programma, script, exec-file, commando. Al te veel namen voor al te veel onbenullige variaties op hetzelfde thema.

Laten we Preston C. Hammer nog even aan het woord: "Het gebruik van de functie schrijfwijze zou een grote vereenvoudiging betekenen voor veel bewerkingen die nu op een onhandige manier voor elkaar komen, maar er heerst een vreemd taboe tegen de notatie." Men ziet hoe wiskunde en informatica blijkbaar niet in staat zijn om een gemeenschappelijke grondtrek te herkennen in begrippen die aan de basis liggen. "Er is wellicht geen beter voorbeeld van gemiste kansen dan in de behandeling van functies. Ik voel dat juist hier de belangrijkste veranderingen met onmiddellijke ingang kunnen worden doorgevoerd" [33]. Wij zullen pogen met de uitvoering van dit programma een begin te maken in de hoofdstukken "OperatorenRekening" en "Duale samenhang".

4.5 Ekomomische Politiek

Bepaald niet toevallig bestaat er een sterke parallel tussen de analyse van het funktiebeprip alhier, en de analyse van de warenruil in "Das Kapital". Het moet inzichtelijk zijn dat de W in Marx' beroemde formule $W - G - W$ overeen komt met de M in onze formule voor het arbeidsproces: $M - A - M$. In ons huidige maatschappelijke bestel funktioneert immers alle materie tevens als handels-"waar". Maar dit impliceert aan de andere kant dat er eveneens een parallel moet bestaan tussen G , dat is de kwantiteit van de warenruil, en A , dat is de kwantiteit van het arbeidsproces. Geld moet dus overeenkomen met duur(te), dat is hetzelfde als maatschappelijke arbeidstijd. We zeggen in het Nederlands gewoon, openhartig, dat iets "duur" is. Het is niet anders dan *rationeel* om uit te gaan van de arbeidstijd als grondslag van het geld.

Het eerste wat in onze maatschappij moet gebeuren is het onder ogen zien van de werkelijkheid van de handelswaar. Met als konsekwentie voor de ekomomische politiek een herwaardering van het geldwezen, in termen namelijk van gestolde maatschappelijke arbeidstijd.

Het idee wordt geopperd dat een "maatschappelijk arbeidsuur" feitelijk ook de *enig mogelijke* mogelijke rationele grondslag is voor een stabiele munteenheid. Ik schat dat in Nederland dit maatschappelijk arbeidsuur overeenkomt met een bedrag van tussen de 50 en 100 gulden. Beter andersom natuurlijk: de gulden komt overeen met ongeveer één minuut maatschappelijke arbeidstijd. Dit is uiteraard een gedateerd gegeven: wij schrijven medio 1995.

Er is goed nieuws. Maatschappelijk kansarme groeperingen in Engeland hebben de zogenaamde "ruilkringen" opgezet. Leden van zo'n kring verlenen elkaar diensten waarvan de arbeidstijd wordt geregistreerd. Het gaat hier om gevraagde diensten zoals bijvoorbeeld de was doen, of het repareren van een auto. Een uur dienstverlening komt overeen met 20 zogenaamde LETS (: Local Exchange Trade System). De gemaakte "lets" worden bijgehouden op (handgeschreven) bonnetjes, waarvan een gedeelte voor de dienstverlener bestemd is, een gedeelte voor de klant, en een gedeelte voor een centrale administratie. Het netto resultaat is inderdaad dat de welvaart van de ruilkring stijgt. Ook doordat een aantal diensten, zoals de reparatie van een auto, niet meer met "echt" geld behoeft te worden betaald, blijft er meer van het laatste over voor aankopen buiten de kring. Hoe groter de kring, des te groter de welvaart. Ruilkringen zijn er behalve in Engeland ook in de Verenigde Staten, en in België (Leuven).

Naarmate het einde van dit hoofdstuk in zicht komt, zullen meer lezers de wenkbrauwen fronsen. Aannemende dat ze al tot hier gekomen zijn. Onverhuld werd daar gerefereerd naar "das Kapital" van Karl Marx, ide-

ologie van een inmiddels "achterhaald" communisme. Het lijkt alsof de schrijver van mening is dat een marxistische denkwijze iets kan bijdragen aan het onderzoek naar de grondslagen der wiskunde. Ik hoef voor deze vrijheid van meningsuiting weliswaar niemand mijn excuses aan te bieden, maar gezien het vrij recente verleden (: de val van de Berlijnse muur) is er ook weinig kans om met een dergelijke opinie serieus te worden genomen. Helpt misschien de mededeling dat de schrijver behalve "das Kapital" ook de Bijbel en de Koran gelezen heeft?

4.6 Samenvatting

0. Alle maatschappelijke en natuurlijke processen zijn het werken van de materie zelf. De elementaire vorm van dit werken wordt mathematisch tot uitdrukking gebracht in het functiebegrip.

1. In zijn "Fysika" maakt Aristoteles expliciet onderscheid tussen natuurlijke en kunstmatige verandering. Hij ziet daarbij over het hoofd dat de maker, door te arbeiden: ook zichzelf bewerkt.

2. Cultuur is Natuur op een hoger plan [5]. Er is zonder de mensen geen voortbestaan van de natuur op deze aarde mogelijk.

3. Nog steeds is de analyse van het (maatschappelijke) arbeidsproces, zoals door Karl Marx neergelegd in "Das Kapital" [27], uiterst aktueel.

4. Het arbeidsproces vindt plaats in dezelfde vormverandering als de warenruil:

$$Materie - Arbeid - Materie$$

5. Samenvoegen en scheiden zijn de enige elementen die de menselijke geest bij de analyse van het arbeidsproces kan waarnemen.

6. Aan de ene kant splitst men de arbeid $M - A - M$ in oorzaak en gevolg. Dit is de materiële zijde van het functioneren, de kwaliteit $M - M$. Deze analyse impliceert aan de andere kant een hoeveelheid abstrakte arbeid, een *tijdsduur* tussen grondstof en produkt. Dit is de immateriële zijde van het functioneren, de kwantiteit $-A-$.

7. Wezenlijk voor de tijd is dat zij oorzaak en gevolg, in die volgorde, van elkaar onderscheidt. Wezenlijk voor de causaliteit is dat grondstof en produkt van elkaar gescheiden worden door een positieve tijdsduur, en dat is weer niets anders dan de prijs die men moet betalen voor iedere vorm van arbeid.

8. Alle waar ofwel iedere waarheid is opgebouwd uit twee tegengestelde polen: gevolg aan de ene kant, oorzaak aan de andere kant. Behalve het werken is dus ook de waar eenheid van grondstof en produkt. Oorzaak en gevolg zijn met elkaar verbonden, tot de waarheid als zodanig, op de

volgende wijze:

$$A - M - A$$

Tussen twee arbeidsprocessen $A-$ en $-A$ bestaat $-M-$ als waar.

9. Er kunnen geen gevolgen bestaan die niet tegelijk weer oorzaak zijn van de een of andere funktie, van welke aard deze verrichting ook moge zijn. Er is geen enkel produkt dat niet op een of andere manier opnieuw grondstof is.

10. En er is geen enkele grondstof die niet op de een of andere manier produkt is. Het is dus vruchteloos om te zoeken naar absolute "first principles" of de uiteindelijke "elementaire deeltjes" waaruit alle materie opgebouwd zou zijn.

11. Arbeid is eenheid van grondstof en produkt, gescheiden door een positieve hoeveelheid tijd. Maar iedere waarde is op zijn beurt vereniging van produkt en grondstof. Het kan dus niet anders of arbeidsprocessen moeten uiteindelijk in elkaar grijpen als een stelsel *kringlopen*. De eenvoudigste kringloop is een funktie samen met zijn inverse.

12. Het ontstaan van de wiskundige verzamelingenleer vindt een duidelijke maatschappelijke parallel in de "kolossale opeenhoping van waren" welke de overgang naar het monopoliekapitalisme markeert.

13. Recapituleert men de klassieke definitie van het funktiebegrip, dan hoeft het geen verwondering te wekken indien deze zeer onzorgvuldige, vooringenomen wijze van abstraheren vroeg of laat aanleiding geeft tot grove theoretische onvolkomenheden, met nare konsekwenties voor de praktijk.

14. Een voorbeeld van een funktionele techniek, die in de quantummechanika zonder veel scrupules wordt toegepast, maar in de officiële wiskunde op aanzienlijke gewetensbezwaren stuit, is de OperatorenRekening.

15. De hervorming van het internationale monetaire stelsel kan dan en slechts dan effectief zijn indien men als waardestandaard een maatschappelijk gemiddeld arbeidsuur accepteert (de "Uras" volgens [0] of de "Lets" naar lokale aardse maatstaven).

4.7 Aantekeningen

0. Een eigenaardig voorbeeld van funkties samenstellen doet zich voor als je een fiets hebt met een gewoon fietsslot, en daarbij een ketting met een apart kettingslot, waarbij de sleuteltjes van fietsslot en kettingslot bovendien aan één sleutelhanger vast zitten. Noemen we de fiets op slot zetten A en de ketting op slot doen B , dan is de fiets van het slot halen A^{-1} en de ketting van het slot halen B^{-1} . Bij aankomst 's morgens op het station zitten beide sleuteltjes in het fietsslot. Men doet eerst de fiets op slot A , daarna

de ketting door het wiel en op slot B . Bij aankomst 's avonds op het station gaat het precies omgekeerd: eerst de ketting van het slot B^{-1} en daarna de fiets van het slot. Omdat de uitvoer van A de invoer is van B , en beide functies inverteerbaar zijn, is namelijk de volgende wetmatigheid van kracht:

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

Ik werd op deze natuurwet attent gemaakt, omdat ik 's avonds nog wel eens wilde proberen om eerst de fiets van het slot te halen.

1. Wat men overbevolking noemt is slechts het probleem van de inefficiënte ruimtelijke ordening en de ondoelmatige sociale organisatie. Onze planeet kan huisvesting bieden aan minstens het tienvoudige van de huidige wereldbevolking [0].

2. Het snelheidsrecord zwemmen ligt op ongeveer 8 km/uur. Wanneer ik zelf 20 baantjes trek in "het Keerpunt" (Barendrecht), dan doe ik daar ongeveer een half uur over. Dat is dus een snelheid van $20 \times 25 / 0.5 = 1 \text{ km/uur}$. Waarbij moet worden opgemerkt dat ik geen beste zwemmer ben. Bovendien wordt een zwemprestatie tegengewerkt door de natuurwet dat de wrijving van het water evenredig is met de snelheid van de zwemmer *in het kwadraat*. Met andere woorden: iemand die vier keer zo sterk is presteert toch maar twee keer beter.

3. Dit resultaat generaliserend mogen we konkluderen: *een mens is niet tien keer beter dan een ander mens*. Hieruit volgt weer dat inkomensverschillen van meer dan een faktor tien uitsluitend teruggevoerd kunnen worden op onrechtvaardige maatschappelijke verhoudingen. Wanneer in de toekomst het peil van de algemene ontwikkeling van de bevolking stijgt, dan moet men zelfs rekening houden met rechtvaardige inkomensverschillen van niet meer dan een faktor twee of drie [0].

4. Ook in de politiek bestaat er slechts één waarheid, namelijk wat de manier is om de mensenmaatschappij maximaal te doen overleven. Men zou deze waarheid op daadwerkelijk wetenschappelijke wijze moeten vaststellen, in plaats van door onderling gekrakeel het pleit te beslechten [0].

5. Het overtreden van een (onbekend of onbemand) stel natuurwetten heeft netto hetzelfde effect als wat in religieuze termen een "wrake Gods" wordt genoemd.

6. Het communisme is "achterhaald". Maar intussen is de door Marx voorspelde "Verelendung", wereldwijd gezien, maar al te zeer bewaarheid. Onze kolen zijn alleen maar zo "goedkoop" omdat in Colombia kinderen van acht jaar de mijnen in worden gestuurd.

Hoofdstuk 5

DISKRETE ONDERGROND

Ten nauwste verbonden met het wiskundige grondslagen onderzoek zijn de mathematische logika en de verzamelingenleer. Centraal in beide systemen staat de Booleaanse algebra. Men kan de ontwikkeling alleen goed begrijpen wanneer zij wordt opgevat als historisch noodzakelijke begeleiding van het ontstaan van de digitale techniek en in het bijzonder van de computer.

5.1 Elementaire klassen

Samenvoegen en scheiden zijn de enige elementen die de menselijke geest bij de analyse van het arbeidsproces kan waarnemen [27]. Hoe de processen van samenvoegen (synthese) en scheiden (analyse) uitpakken op de dingen als zodanig zou beschreven kunnen worden in een theorie die de Algemene Verzamelingenleer heet. Laten we kritisch bezien hoe wiskundigen een dergelijke algemene theorie hebben opgevat en uitgewerkt.

"Wezenlijk voor de verzamelingenleer is het onderscheid tussen verzameling en element. Verwar nooit $\in$ en $\subset$; a en $\{a\}$ ". Men treft een zinsnede van deze strekking aan in de eerste hoofdstukken van menig leerboek [31].

Maar ik zou eigenlijk wel eens willen weten op grond waarvan dat zo zou zijn. Anders gesteld: wat is *materieel* gezien dan het verschil tussen een "los" element a en de verzameling $\{a\}$ die dat element als enige bevat? Bestaat $\{a\}$ misschien uit *meer* dan uitsluitend a ? Het antwoord is: nee. Wordt a misschien anders zodra hetzelfde ding wordt aangeduid met twee accoulaides er omheen? Ik kan me het nauwelijks voorstellen. Materieel gezien is er dus wel degelijk sprake van "verwarring", een verwar-

ring die alleen maar groter lijkt te worden naarmate men beter over deze dingen gaat nadenken. Wat sommige wiskundigen zo gemakkelijk onze "verwarring" noemen, zou wel eens niets anders kunnen zijn dan: alleszins gerechtvaardigde twijfel. Wij durven zonder veel omhaal stellen dat, voor alle a :

$$\{a\} = a$$

Mijn kritiek op de verzamelingenleer heeft voornamelijk betrekking op het hier boven gekonstateerde "elementalisme" (: de terminologie is afkomstig van Alfred Korzybski [34]). De verzamelingenleer wordt opgetrokken vanuit het begrip "element". Men gaat er bij voorbaat van uit dat iedere zaak een ondeelbaar geheel, een punt, ofwel een samenraapsel van ondeelbare delen, van punten is. Feitelijk poneert men daarmee een fysische hypothese, namelijk dat bepaalde delen elementair en andere delen niet elementair zouden zijn, en dat zo iets in de werkelijkheid zou overeenkomen met een meetbaar onderscheid. Primitieve atoomtheorie in de zin van Epicurus. Dat er "echte elementen" in de natuur bestaan, moet men eerst maar eens zien te bewijzen. Tot nu toe zijn alle elementen steeds weer opnieuw deelbaar gebleken.

Wanneer a een element is van A , dan is het natuurkundig zeer zeker ook zo dat a deel(verzameling) is van A . Men kan hoogstens konstateren dat "element zijn van" $\in$ een meer specifieke betekenis zal hebben dan "deel zijn van" $\subset$. Voor een fysisch verantwoorde opzet van de verzamelingenleer is het dan ook nodig, en voldoende, om het idee "deel zijn van" $\subset$ op te vatten als grondgedachte, en "element zijn van" $\in$ later, als een speciaal geval hiervan, in te voeren.

Met andere woorden: verzamelingen zijn in de werkelijkheid altijd "transitief". Uit $a \in A$ volgt altijd en overal dat ook $a \subset A$. Elementen zijn slechts een bijzonder soort van deelverzamelingen.

Tot de klassieke wiskunde behoort de volgende opvatting:

Zij A een verzameling, dan heet de verzameling $K = \{x, y, z, \dots\}$ een klasse-indeling (partitie) van A , wanneer voldaan is aan het volgende pakket van eisen:

$$x \neq \emptyset$$

$$(x \neq y) \Rightarrow ((x \cap y) = \emptyset)$$

$$\bigcup_x = A$$

Zo men wil is een kwantifikatie $\forall_{x,y \in K}$ bij deze definitie inbegrepen.

In gewoon nederlands staat er:

1. een klasse is niet leeg;
2. twee verschillende klassen hebben geen deel gemeenschappelijk;

3. de klassen vullen samen heel A op.

Een partitie van A is dus het opsplitsen van A in delen die niet leeg, en onderling gescheiden zijn.

Wat denkt men van de volgende "toevallige" analogie.

Voor de elementen van een willekeurige verzameling geldt:

1. een element is niet "niks";
2. twee verschillende elementen hebben niets met elkaar gemeen;
3. alle elementen samen maken de hele verzameling uit.

Om in wiskundige termen te spreken, er bestaat een sterke "isomorfie" tussen "klassen" en "elementen". Men is geneigd om in zo'n geval beide begrippen te identificeren. Waarom dan wel overal elders in de wiskunde, maar niet hier? Waarom zijn bijvoorbeeld de "Finite Elements" van de Mechanika op de een of andere manier niet te vereenzelvigen met de elementen van een verzameling? Het moet duidelijk zijn dat we staan te popelen om in te grijpen. Werkdefinitie:

Zij A een zaak of ding. Men noemt $x, y, z, \dots$ *elementen* van A , met andere woorden A is een *verzameling* $\{x, y, z, \dots\}$, indien voldaan is aan het volgende pakket van eisen:

$$x \neq \emptyset$$

$$(x \neq y) \Rightarrow ((x \cap y) = \emptyset)$$

$$\bigcup_x = A$$

En nu komt het! Wij zetten hier de *element-notatie* in : $x \in A$.

Met andere woorden: "klassen" zijn identiek aan elementen. Er is geen enkele fysische reden om er een dubbel stel begrippen op na te houden. Deze theorie is ook holistisch. Ze werkt "top down". Ze gaat uit van de zaak als geheel en komt pas na een opdeling daarvan tot het elementbegrip, en daarmee tot de eigenlijke verzamelingenleer.

De allereerste stelling die te bewijzen valt in de nieuwe verzamelingenleer is die van "transitiviteit": dat elementen *deel* uitmaken van de zaak.

Stelling: $(a \in A) \Rightarrow (a \subset A)$.

Bewijs: $a \cap A = a \cap (\bigcup_x) = (a \cap a) \cup (a \cap x) \cup (a \cap y) \dots = a \cup \emptyset \cup \emptyset \dots = a$

Dus: $a \cap A = a$. En dit is hetzelfde als $a \subset A$. QED.

Wanneer het zo is dat in de logika der atoomfysika de distributieve wet niet opgaat, dan kan bovenstaand bewijs dus niet geleverd worden. Dit terzijde.

Wat is er gebeurd? Ik durf bijna niet om te kijken. Wat zal er onder dit regime bijvoorbeeld overblijven van de algemene verzamelingenleer? Nu schrompelde deze laatste ook onder de aanpak van het intuitionisme reeds ineen tot een relatief onbelangrijke tak van de wiskunde, dus wat dat betreft zijn we niet origineel. Wanneer men van de eerste schrik is gekomen,

dan is het wellicht nuttig om alvast enige konsekwenties van de alternatieve opvatting op een rij te zetten:

1. A kan element zijn van zichzelf, maar dan en slechts dan als de triviale partitie $\{A\}$ van A wordt beschouwd. Dan is $A \in A$ en $\{A\} = A$. Indien er geen triviale partitie van A gegeven is, dan kan A geen element van zichzelf zijn. (Dit lost mede de verzamelingen-paradox van Russell op.)
2. Een "geordend paar" (a, b) kan *niet* langer worden gedefinieerd door $\{a, \{a, b\}\}$, omdat geen twee verschillende elementen in een verzameling een deel gemeenschappelijk kunnen hebben. Hier zou $a \cap \{a, b\} = a$.
3. Om dezelfde reden kunnen natuurlijke getallen *niet* worden gedefinieerd door alsmaar meer accolades te zetten om de lege verzameling heen, zoals dat wordt gedaan in de zogenaamde "naieve" (is dat zo?) verzamelingen-leer volgens [35]:

$0 := \emptyset$, $1 := \{\emptyset\}$, $2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$...

Geen mens kan de hoop koesteren ooit *iets* te kunnen scheppen uit het *niets*. En een mathemaat is tenslotte ook maar een mens.

Zij nog vermeld dat bovenstaande constructie bekend staat als het aanmaken van "transitieve" verzamelingen. Dat zijn verzamelingen waarvan ieder element ook weer een deel(verzameling) is. Merkwaardig: dat laatste klopt namelijk altijd, alleen niet in de betekenis die zij, in de formele wiskunde, eraan geven.

5.2 Van hetzelfde

Tot de klassieke wiskunde behoort de volgende opvatting:

Een relatie $\equiv$ heet een equivalentie-relatie wanneer zij reflexief, symmetrisch en transitief is:

$$a \equiv a$$

$$(a \equiv b) \Rightarrow (b \equiv a)$$

$$((a \equiv b) \wedge (b \equiv c)) \Rightarrow (a \equiv c)$$

Ook hier heb ik gemakshalve de $\forall$ kwantifikaties weggelaten.

Om de bedoeling die achter deze opvatting steekt te illustreren, wordt in "Algebra en Analyse" [31] gezegd: "dat iedere equivalentierelatie zoiets als een gelijkheid is, een gelijkheid in een zeker opzicht". Ogenschoonlijk is hier niets op aan te merken: equivalentie-relaties zijn blijkbaar bedoeld als generalisatie van het gelijkheids-begrip.

We gaan dus op zoek in de wiskundige literatuur, waar ergens het begrip "gelijkheid" nader wordt gedefinieerd. *Het gelijktteken = is stellig het symbool dat in de wiskunde het meest van al wordt gebruikt.* Het zou interessant zijn om het aantal gelijktekens in een wiskundige verhandeling

eens te tellen! Het is dus uitermate belangrijk er een goed begrip van te hebben wat $a = b$ nu precies betekent.

En nu komt het vreemde: ons zoeken blijkt vruchteloos. Bijna niets hierover te vinden. En als er al een omschrijving wordt gegeven dan zijn het fraaie cirkel-definities, zoals: twee verzamelingen zijn gelijk wanneer ze beide dezelfde elementen hebben (: dit is het "axioma van uitgebreidheid"). Prachtig: wanneer zijn dan die elementen "hetzelfde" ?

Iets wat op een definitie lijkt, kwamen we voor het eerst tegen in de "Principia Mathematica" van Russell en Whitehead [36]. In het algemeen komt men trouwens terecht bij literatuur over de mathematische logika, wanneer men iets over het gelijkheidsbegrip wil vinden, en wel speciaal bij de PredikatenLogika. In klassiek logische notatie luidt de definitie van Russell en Whitehead ten naaste bij als volgt:

$$(a = b) \Leftrightarrow (\forall P : P(a) \Leftrightarrow P(b))$$

In gewoon Nederlands: a is gelijk aan b , dan en dan alleen, als a en b elke eigenschap P gemeen hebben [28].

Akkoord: beschouw de beweringsvorm " $1 = 1$ ". Dan is de 1 aan de linkerkant van het gelijkteken ongelijk aan de 1 aan de rechterkant van het gelijkteken. Immers de eigenschap "aan de linkerkant van het gelijkteken staan" gaat niet op voor de 1 aan de rechterkant. We konkluderen tot een paradox: $1 \neq 1$.

Een ons inziens juistere konklusie is dat de gelijkheid = simpelweg niet goed gedefinieerd is in een Logika boek als de Principia. Natuurlijk kan men meteen tegenwerpen dat ik in bovenstaande redenering doelbewust een zelf-referentie, en daarmee bij voorbaat een cirkelgang heb ingebouwd. Ik zal de laatste zijn om te ontkennen dat hier inderdaad boos opzet in het spel was. Elke logicus van enig formaat slaat mij dit wapen trouwens bij voorbaat uit handen [28].

Blijft overeind staan het argument dat de vereiste van "alle" eigenschappen een uitermate bedenkelijke konstruktie is. Een betere oplossing is ongetwijfeld om het begrip gelijkheid in plaats daarvan als grondbegrip te accepteren. Toch is de opvatting van Russell & Whitehead niet geheel en al onbruikbaar. Het enige probleem is immers de kwantifikatie met $\forall$ voor letterlijk "alle". Indien we wat bescheidener zijn, en dit "alle" beperken tot een zekere verzameling van eigenschappen, dat zijn ze dus niet "allemaal", dan komt de definitie er uit te zien als volgt:

$$(a = b) \Leftrightarrow (\forall P \in I : P(a) \Leftrightarrow P(b))$$

We beperken ons dus tot een (eindige) verzameling I van eigenschappen, waarin volzinsfuncties $P(x)$ die tot tegenspraken aanleiding geven, zoals

"x bevindt zich aan de linkerkant van het gelijktteken", eenvoudig niet voorkomen. Daarmee is het probleem, althans voorlopig, van de baan.

We hebben echter een ander probleem geschapen. Immers, voortaan kunnen twee dingen slechts gelijk verklaard worden op grond van eigenschappen die element zijn van een (eindige) verzameling I . Laten we deze verzameling noemen het *opzicht* van de gelijkheid in kwestie. Dingen kunnen dus voortaan alleen maar gelijk zijn "in een zeker opzicht I ". Komen we nu terug op de uitspraak dat equivalentie-relaties een generalisatie zouden zijn van het "gewone" gelijkheidsbegrip, een gelijkheid namelijk in een zeker opzicht, dan bemerken we ogenblikkelijk dat er, alweer, iets niet in de haak lijkt.

Maar wat praten we nog? Wanneer de "gewone" gelijkheid gewoon niet behoorlijk gedefinieerd is, zoals we hierboven hebben geconstateerd, dan valt er helemaal niets te generaliseren! Men hoeft bijgevolg alleen maar te *ontkennen* dat equivalentierelaties een "generalisatie" zijn van het gelijkheidsbegrip.

Een voorbeeld uit de groepentheorie moge verduidelijken dat het onderscheid dat mathematen maken tussen gelijkheid en equivalentie, ofwel hun mechanisme van "definitie door abstraktie" inderdaad een twijfelachtige status heeft. Verschillende draaiingen, laten we zeggen om 45, 90, 180, 360 graden kunnen worden samengenomen tot de klasse der algemene rotaties. Deze klasse gedraagt zich ten opzichte van andere klassen van symmetrie elementen als één element. Dit is een "definitie door abstraktie" welke voor de groepentheorie essentieel is. Echter, zijn alle rotaties zelf niet reeds "gedefinieerd door abstraktie"? Uitgevoerd in New York of in Eindhoven, uitgevoerd door mij of door iemand anders. Wat is nu "abstrakter", het "element" of de "equivalentie klasse":

90 graden draaien in New York = 90 graden draaien in Eindhoven (: gelijk)

90 graden draaien = 360 graden draaien (: equivalentie klasse)

Equivalentierelaties kunnen wat ons betreft in het geheel niet onderscheiden worden van een "gewone" gelijkheid. *Iedere gelijkheid is al bij voorbaat "in een zeker opzicht"*. Klassieke voorbeelden treft men aan in de meetkunde, waar men van oudsher criteria kent voor voor het "congruent" en "gelijkvormig" zijn van driehoeken:

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR \quad ; \quad \triangle ABC \sim \triangle PQR$$

Er is hoegenaamd niets op tegen om twee driehoeken gelijkvormig of congruent te blijven noemen. Het is echter waardevol te beseffen dat zulke driehoeken dan tevens in een zeker opzicht I gewoon *gelijk* zijn.

De cirkel wordt gesloten door op te merken dat equivalentie-relaties gepaard gaan met een klasse-indeling, zoals gelijkheid gepaard ging met de

elementen van een verzameling zelf. Er bestaat echter geen verschil meer tussen gelijk en equivalent, net zo min als er nog verschil bestaat tussen een partitie en een element. Het een brengt het ander onherroepelijk met zich mee. Hiermee is onze theorie rond. Bijvoorbeeld zijn twee verzamelingen inderdaad gelijk als ze dezelfde elementen hebben. Dat is echter geen axioma meer, maar een stelling.

Er bestaan in de wiskunde legio opvattingen die een intieme relatie hebben met het oneindigheidsbegrip. We hebben een tweetal van deze opvattingen hierboven trachten te ontzenuwen. Neem het klassieke begrip "element van een verzameling". Hiervan kunnen er a priori oneindig veel zijn, om reden dat zo'n element niet ergens deel van uitmaakt, en dus ook niet onderhevig is aan restricties van het eerst moeten opdelen van een zaak. Het laatste verhindert een aktueel oneindig op effectieve wijze. Of neem het gelijkheidsbegrip in de klassieke betekenis. Het is gebleken dat, teneinde zo'n gelijkheid te realiseren, een verzameling van een oneindig aantal eigenschappen nodig is. Door eindigheid te forceren, worden gelijkheids-relaties automatisch identiek aan equivalentie-relaties.

Tot slot grijpen we nog even konkreet terug op het hoofdstuk "Materialisatie". Het eenvoudigst laat zich de terugweg van idealisatie beschrijven aan de hand van het gelijkheidsbegrip, tevens het belangrijkste geval trouwens. Wij hebben de klassieke diskrete gelijkheid gematerialiseerd tot een lijken op $\equiv$ in een opzicht I van eindig veel eigenschappen. Deze aspektverzameling I zal de klassieke kollektie van "alle" predikaten beter benaderen naarmate zij meer eigenschappen bevat. Wanneer het aantal predikaten in de aspektverzameling I "naar oneindig gaat", dan krijgen we de klassieke diskrete gelijkheid weer (min of meer) terug. Wij noemen daarom het geval $|I| \rightarrow \infty$ een *klassieke limiet*.

5.3 Allerlei logika

De geschiedenis van de moderne wiskunde is doortrokken van een merkwaardige tweespalt. Enerzijds een mathematische logika en een verzamelingenleer, zoals die worden aangewend in de theorieën der zuivere wiskunde. Anderzijds een schakel-algebra, zoals die toepassing vindt bij het ontwerpen van digitale circuit's. Een theorie en een techniek die elkaar wel enige lippendienst bewijzen, maar voor het overige volledig hun eigen gang gaan. Het is op zijn zachtst gezegd merkwaardig dat deze oorverdovende scheiding der geesten blijkbaar nog maar weinig wetenschappers is opgevallen. Wij zijn zelf geneigd om de praktische ontwikkeling als de meest relevante te beschouwen, en zullen nu het theoretische verschijnsel als begeleidend fenomeen daarvan onderzoeken.

Zeker is dat althans de propositie-logika een zeer konkrete representatie heeft gevonden in de hardware van kombinatorische schakelingen. Zo komt de conjunctie van logische variabelen overeen met een serie-schakeling, de disjunctie met een parallel-schakeling (of omgekeerd). Samen met een complement-schakeling als "harde" ontkenning heeft men zo een compleet stelsel van logische componenten. Alle logische operaties kunnen worden uitgevoerd door serie- en parallel-schakelingen van deze componenten te combineren. Een dergelijke, als hardware gerealiseerde logika, is ruimtelijk van opbouw en brengt uitsluitend schakelingen voort welke statisch zijn in de tijd.

Louter met kombinatoriek kan men in de digitale techniek niet ver komen. Sequentiële schakelingen slaan de brug, van een logika in de ruimte, naar een logika in de tijd. Het geeft te denken dat juist op het punt van de sequentiële schakelingen de wegen van theorie en praktijk zich splitsen. Gezien vanuit de digitale techniek is de mathematische logika een volkomen statische theorie, welke als zodanig ongeschikt is om er de tijdafhankelijkheid van flip-flops mee te beschrijven. In de schakeltechniek is men dan ook overgegaan tot de ontwikkeling van een geheel eigen wiskundig apparaat, dat met de gang van zaken in de mathematische logika verder geen enkel herkenbaar verband houdt [37]. Vanuit deze invalshoek komt het voornaamste gebrek van de mathematische logika dus ogenblikkelijk aan het licht: gebrek aan dynamiek, in de *tijd*. Overigens is de logika in de tijd meer een kwestie van software dan van hardware.

De loop van een computer-programma wordt in belangrijke mate gestuurd door conditionele sprongopdrachten. Uitdrukkingen met "AND", "OR", en "NOT" komen voor, de logische kern echter wordt gevormd door statements van de gedaante "IF ... THEN ..." (: Basic, Cobol, Fortran). Nu is het bepaald geen geheim dat, bij formalisering van het redeneren volgens de mathematische logika [28], diskrepanties ontstaan met het "als ... dan ..." van de omgangstaal. Verrassend is dat deze nadelige gevolgen van abstraktie zich *niet* voordoen bij het "IF ... THEN ..." van de hogere programmeertalen. Deze voorwaardelijke constructie sluit naadloos aan bij wat in de spreektaal ervan wordt verwacht. Is dit misschien de "formele" implikatie waar men in de mathematische logika voortdurend naar op zoek lijkt te wezen?

Stel dat dit zo is, dan is het bovendien mogelijk om ook de andere logische bewerkingen met behulp van 'formele' implicaties te definiëren. Dit gaat binnen de mathematische logika zelf met behulp van alleen de implicatie en de negatie. Bekend zijn namelijk de volgende formules:

$$P \vee Q \equiv \neg P \Rightarrow Q \quad P \wedge Q \equiv \neg(P \Rightarrow \neg Q)$$

Maar ook in een boek over het ontwikkelen van compilers [38] lezen wij,

onder de vlag van het "optimaliseren van logische uitdrukkingen":

```
c OR d   wordt gedefinieerd door IF c THEN TRUE ELSE d
c AND d  wordt gedefinieerd door IF c THEN d ELSE FALSE
NOT c    wordt gedefinieerd door IF c THEN FALSE ELSE TRUE
```

Voor een logika in de tijd is de implikatie blijkbaar het meest geëigend als elementaire operator. Volledigheidshalve dient het bovenstaande nog te worden aangevuld met:

```
c ==> d wordt gedefinieerd door IF c THEN d ELSE TRUE
c       wordt gedefinieerd door IF c THEN TRUE ELSE FALSE
```

In plaats van de abstracte notatie in [38] te volgen, hebben wij deze definities nagebootst met eenvoudige programmaatjes in BASIC. Dat is in wezen hetzelfde, maar sluit denkelijk beter aan op de ervaring van menige lezer. Hier komen ze:

1 PRINT " A or B"	1 PRINT " A and B"
2 FOR A=0 TO 1 : FOR B=0 TO 1	2 FOR A=0 TO 1 : FOR B=0 TO 1
3 X=1	3 X=1
4 IF A=1 THEN 7 ELSE 5	4 IF A=1 THEN 5 ELSE 6
5 IF B=1 THEN 7 ELSE 6	5 IF B=1 THEN 7 ELSE 6
6 X=0	6 X=0
7 PRINT A;X;B	7 PRINT A;X;B
8 NEXT B : NEXT A	8 NEXT B : NEXT A
1 PRINT "not A "	1 PRINT " A ==> B"
2 FOR A=0 TO 1	2 FOR A=0 TO 1 : FOR B=0 TO 1
3 X=1	3 X=1
4 IF A=1 THEN 6 ELSE 7	4 IF A=1 THEN 5 ELSE 7
6 X=0	5 IF B=1 THEN 7 ELSE 6
7 PRINT X;A	6 X=0
8 NEXT A	7 PRINT A;X;B
	8 NEXT B : NEXT A

Laten we ons wat dit hoofdstuk betreft verder beperken tot de statische logika. Sleutelwoord bij een holistische benadering van logika en verzamelingenleer is zoals gezegd de algebra van Boole. Belangrijk in dit verband is de volgende konstatering:

De Boole algebra kan worden opgezet zonder in enigerlei opzicht te refereren aan het element-begrip.

Deze zienswijze wordt ondersteund alleen al door het feit dat de propositielogika geheel kan worden geformuleerd in termen van dezelfde Boole algebra. Maar ook binnen de verzamelingenleer zelf heersen zekere gewoontes.

Verzamelingstheoretische bewerkingen worden vaak geïllustreerd met behulp van zogenaamde Venn-diagrammen. Opvallend is dat bij deze visuele weergave er vrijwel altijd van wordt afgezien om ook de elementen te tekenen. Met andere woorden: bij stellingen die door genoemde "eierplaatjes" worden geïllustreerd - en dat zijn er nogal wat - abstraheert men als vanzelf van het elementbegrip. Stellingen van de Boole algebra worden op deze wijze, ook wanneer ze betrekking hebben op verzamelingen, *elementloos* gerepresenteerd. Zij weten dat niet, maar zij doen het [27].

We hebben hierboven gewezen op de grote tweespalt binnen de logische discipline: de theoretische mathematische logika aan de ene kant, de praktische logika van digitale schakelingen aan de andere kant. Typisch is nu dat in de schakeltechniek een unifikatie wordt bewerkstelligd tussen enerzijds zaken uit de mathematische logika (waarheidstafels) en anderzijds zaken uit de verzamelingenleer (Karnaugh diagram). Het precieze verband is wezenlijk eenvoudig. Logische variabelen w, x, y, z worden tegelijkertijd opgevat als verzamelingen. Deze verzamelingen vormen met elkaar disjunkte doorsnijdingen, de zogenaamde "mintermen". Samen vullen deze mintermen het universum, als volgt voor twee variabelen (vier stuks):

$$(\bar{x} \cap \bar{y}) \cup (\bar{x} \cap y) \cup (x \cap \bar{y}) \cup (x \cap y)$$

Op grond van het voorgaande kunnen wij de mintermen echter voortaan betitelen ook als doodgewone *elementen*. Ze zijn immers niet leeg, ze zijn onderling disjunkt, en ze vullen een hele verzameling op.

Met de opvatting van een 4 x 4 Karnaugh diagram in het achterhoofd betekent een bitreeks als (0101) één element van de zestien, namelijk het element $(\bar{w} \cap x \cap \bar{y} \cap z)$. Anderzijds zijn er in alle moderne computers mogelijkheden aanwezig om op zulke bitreeksen Booleaanse bewerkingen toe te passen. Op het moment dat we dat doen, is (0101) echter geen element meer, maar een verzameling. Stel dat we in totaal vier elementen w, x, y, z hebben, dan komt (0101) overeen met $\{x, z\}$. We hebben hier iets heel merkwaardigs ontdekt:

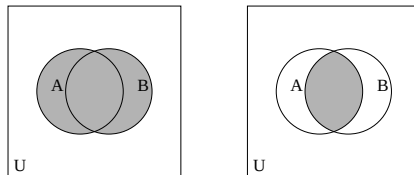
Elementen en verzamelingen kunnen blijkbaar hun rollen omwisselen. Er is een dubbele opvatting mogelijk van de verhouding tussen element en verzameling. Het zijn eigenlijk duale begrippen.

Het is zeker geen toeval dat men in de wereld der gegevensbestanden (databases) al veel eerder op deze dualiteit gestuit is. Database Ontwerp [39] is immers praktische verzamelingenleer bij uitstek, zou dat althans moeten zijn. Maar de verwarring in het vakgebied is groot. En de ontoepaselijke opzet van de klassieke verzamelingenleer is, ongetwijfeld, hoofdschuldige in dit drama. Het boek van ter Bekke geeft een goed overzicht, voor wie de kunst verstaat om tussen de regels door te lezen.

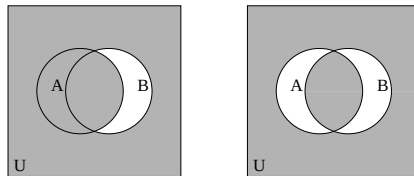
In boeken over schakeltechniek wordt vaak geen verschil gemaakt tussen verzamelingstheoretische operatoren aan de ene, en logische bewerkingen aan de andere kant. Wat zou er gebeuren als we deze werkwijze overnemen? Inderdaad kan op grond van de Boole algebra een één-éénduidig verband worden gelegd tussen beide notatie-systemen. Wij maken een staatje op:

Verzamelingen	Leer	Mathematische	Logika
vereniging	$A \cup B$	of	$a \vee b$
doorsnede	$A \cap B$	en	$a \wedge b$
complement	$\bar{A}$	niet	$\neg a$
deelverzameling	$A \supset B$	impliceert	$a \Rightarrow b$
gelijkheid	$A = B$	equivalent	$a \Leftrightarrow b$

In de volgende figuur zien we de eierplaatjes van respectievelijk vereniging en doorsnede. Weinig schokkende beelden:



Ongewoner zijn de Venn diagrammen van deelverzameling en gelijkheid:



Het ongewone zit 'm in het feit dat nu ook $(A \supset B)$ en $(A = B)$ worden opgevat als *bewerkingen* in plaats van als *relaties*, precies zoals het geval is bij $\cap$ en $\cup$.

$(A \supset B)$ is een verzameling die bestaat uit de (Karnaugh-)elementen $\{\bar{A} \cap \bar{B}, A \cap \bar{B}, A \cap B\}$, met daarin niet $\bar{A} \cap B$. Dit komt merkwaardigerwijs in het geheel *niet* overeen met de waarheidstabel voor de implicatie $\Rightarrow$:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in (A \supset B)$	$(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	0	1
1	1	1	1

$(A = B)$ is een verzameling die bestaat uit de (Karnaugh-)elementen $\{\bar{A} \cap \bar{B}, A \cap B\}$, met daarin niet $A \cap \bar{B}$ en $\bar{A} \cap B$. Dit komt *wel* keurig overeen met de waarheidstabel voor de equivalentie $\Leftrightarrow$:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in (A = B)$	$(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)$
0	0	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
1	1	1	1

Duaal aan deze opvatting is de XOR bewerking, die in computer programma's, op machinetaal niveau wordt toegepast om te kijken of twee woorden A en B gelijk zijn. Is dit het geval, dan wordt $(A \text{ XOR } B)$ gelijk aan 0, waarna meestal een voorwaardelijke sprong instructie volgt.

Omgekeerd is er ook wat voor te zeggen om $A \Rightarrow B$ op te vatten als de klassieke relatie $A \supset B$. "A impliceert B" betekent dan dat A ruimer is dan B en zodoende B omvat. Dit is mogelijk een andere weg om de "paradoxen der implicatie" [28] te vermijden. Uit het bovenstaande blijkt reeds dat we in ieder geval met verschillende opvattingen (lees: waardetabellen) te maken hebben.

Voor de logische equivalentie geldt net zo, dat $A \Leftrightarrow B$ in alle redelijkheid zou kunnen worden opgevat als een gelijkheidsrelatie $A = B$.

5.4 Paradoxen

Ook de mathematische logika kent haar grijze circuit. Een hoogst merkwaardig werkje is "Laws of Form" ("Idee Wetten") van George Spencer Brown [40]. In dit boek wordt de logika equivalent verklaard met een rekenkunde van "ideeën". Voor de elementaire "idee" gebruikt Spencer Brown een geheimzinnig teken, dat ook de omslag van zijn boek siert: $\lceil$. Gemakkelijk is echter in te zien dat deze "idee" vervangen kan worden door een paar haakjes: een linker plus een rechter haakje. Formules in de zin van Spencer Brown bestaan dan uit (gepaarde) haakjes of uit niets (: de "leegte"). Bijvoorbeeld $((()())())$ is zo'n formule. De enige rekenregels in het systeem van Spencer Brown zijn:

$$(()) = \quad ()() = ()$$

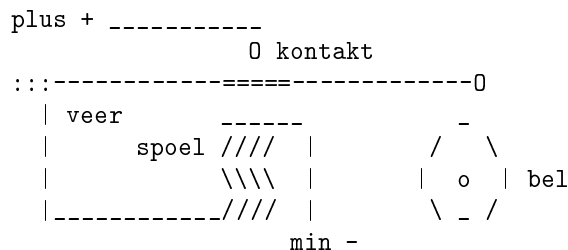
Interessant is de meetkundige interpretatie hiervan: een blindemannetje dat "grenzen" van gebieden in het platte vlak oversteekt. Twee keer de grens over is geen grens over (: regel 1); en er is geen verschil waarneembaar tussen de binnenkant van het ene of van het andere gebied (: regel 2). De

auteur laat vervolgens zien hoe de gehele klassieke propositielogika vanuit deze "idee wetten" kan worden opgebouwd.

Vele malen boeiender zijn Spencer Brown's vingerwijzingen naar een logika die in plaats hiervan *dynamisch* zou zijn. Echter, op dit punt aangekomen wordt de tekst buitengewoon duister. In feite houdt het op. In een privé korrespondentie via Internet (het wereldwijde elektronische netwerk dat vele computers met elkaar verbindt) ben ik er in geslaagd ietsje meer duidelijkheid te krijgen, maar voor het overige valt de oogst tegen. Ik doel hier op zinnen in de logika die een referentie naar zichzelf bevatten, zoals: "De kapper in het dorp scheert uitsluitend degenen die zichzelf niet scheren". De vraag is: "Scheert deze kapper zichzelf?". Nee, want als hij zichzelf scheert dan hoort hij niet bij degenen die zichzelf niet scheren, dus scheert de kapper hem, en dat is hijzelf, niet. Ja, want als hij zichzelf niet scheert, dan scheert de kapper hem, en dat is hijzelf, wel. Welles, nietes, welles, nietes. Uitspraken als deze gaan als het ware op en neer, ze *oscilleren* tussen wel en niet.

Volgens de school van Spencer Brown (en ook volgens mijzelf) kan deze aard van paradoxen worden toegelicht aan de hand van een fysisch paradigma, namelijk de oscillator. Prototype van een dergelijke oscillator is de ouderwetse deurbel. Doordat de stroomkring gesloten is, wordt klepel naar de magneet toegetrokken. Daardoor wordt echter de stroomkring verbroken, waardoor de klepel terugveert. Daardoor wordt de stroomkring weer gesloten, waardoor de klepel weer naar de magneet (en naar de bel) wordt toegetrokken, enzovoort.

Zodra de stroomkring gesloten is, wordt ze verbroken. Maar zodra ze verbroken is, wordt ze weer gesloten. Doordat het ja is, wordt het nee. Maar doordat het nee is, wordt het weer ja.



Deurbel (plaatje afkomstig uit elektronische post)

Dat een dergelijke paradox niettemin in de natuur kan bestaan, is te danken aan het feit dat ja en nee weliswaar gelden, maar *niet tegelijkertijd*. Ja en nee zijn niet gelijktijdig maar beurtelings waar. Verantwoordelijk voor het oplossen van de paradox is dus het fenomeen *tijd*. Tegenstrijdigheden

worden opgelost in de tijd. Maar ook omgekeerd. Oscillatoren analoog aan de deurbel worden ingezet om tijd te meten, misschien kunnen we zelfs zeggen: om de tijd *te definiëren*. Het hart van een computer is de klok, een oscillator, zelf dus een toonbeeld van tegenstrijdigheid. Wie zei er ook alweer dat in een wiskundige machinerie geen paradoxen kunnen bestaan?

Typend voor een programmeertaal als Basic (en ook Fortran, "C", niet Pascal) zijn programmeerregels van de vorm:

`i=i+1`

Ook hier staat eigenlijk een onmogelijkheid. Trekken we aan beide zijden van deze "gelijkheid" de waarde van i af, dan komt er iets te staan wat nog veel absurder aandoet:

`0=1`

Enig nadenken leert dat deze "paradoxen" in Basic van soortgelijke aard zijn als het trillen van een oscillator. Evenals bij de laatste, wordt de paradox van `i=i+1` opgelost in de tijd. Dit wordt nog duidelijker indien we de programmeerregel vervangen door een soortgelijke uitdrukking, met in plaats van een geheelgetal een logische variabele:

`BOOLE = NOT BOOLE`

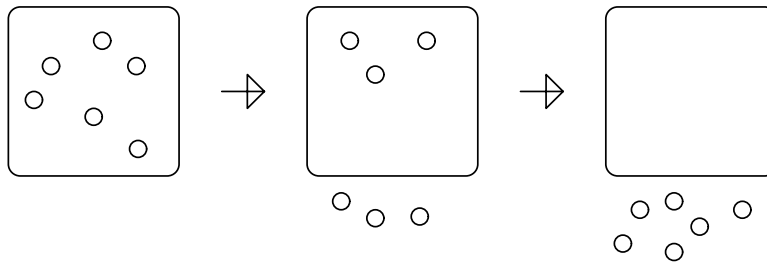
Basic programmeurs zullen dit allemaal kinderachtig vinden. Iedereen weet toch dat het "gelijkteken" in Basic of C niet statisch, maar dynamisch bedoeld is. Het duidt op een *verandering*, van i in een waarde die 1 meer is. Andere programmeertalen (Maple, Pascal) gebruiken hiervoor dan ook een enigszins ander symbool: `i := i+1`, met daarin `:=` uit te spreken als "wordt". Basic programmeurs vinden dit niet zo nodig. In feite huldigen zij hiermee een *dynamische* in plaats van een statische *opvatting* van gelijkheid. Sprak niet een oude Griekse wijsgeer (Heraclitus) reeds uit de woorden: "alles stroomt, niets blijft" ?

5.5 Leren tellen

Toen de jongste in ons gezin vier jaar oud was, probeerden zijn ouders hem de kunst van het tellen bij te brengen. Dat ging in de trant van: "Vertel eens, hoeveel appels liggen er in die mand". Ofschoon de kleuter enkele telwoorden (ordinaal getallen) wist op te noemen: "een, twee, drie, vier, ...", bleek dat hij niet in staat was om deze in verband te brengen met het tellen van appels (kardinaal getallen). Dat bleef een tijdje zo. Maar terwijl we bleven oefenen, werd gaandeweg duidelijk dat hij eigenlijk iedere keer

dezelfde fout maakte. Op de een of andere manier was hij niet in staat om een appel slechts één keer te tellen. Hij verbond aan iedere appel meer dan één telwoord en bleef op die manier rondjes draaien, tot hij verveeld raakte. Dat laatste gebeurde meestal vrij snel: "Tien, mama!".

Na een aantal vruchteloze pogingen, deden we het volgende. Het kind werd ertoe aangezet om iedere keer een appel *uit* de mand te nemen, en tegelijkertijd een telwoord te zeggen. Toen geschiedde het wonder: hij hield op met tellen nadat de laatste appel uit de mand was gepakt. Het stop-probleem was opgelost!



Laten we het tel-proces van dit kind in detail beschouwen. Want de kleine heeft natuurlijk alle gelijk van de wereld. Het zijn de volwassenen die verkeerd zijn voorgelicht, en denken dat het mogelijk is om appels te tellen door er alleen maar naar te kijken, en dat kijken geen pijn doet. De werkelijkheid zit echter iets anders in elkaar. Het nemen van appels uit de mand *vernietigt* zelfs in feite de verzameling waar we juist de kardinaliteit van wilden bepalen.

In het algemeen is het onmogelijk om een verzameling te tellen zonder diezelfde verzameling op de een of andere manier te verstoren, of zelfs te vernietigen.

Zelfs als men appels telt door er alleen naar te kijken, dat zal trouwens alleen maar lukken als het aantal niet te groot is, zelfs dan is men bezig met fotonen op de appels af te schieten. Je kunt ze immers niet zien zonder licht. Afgezien daarvan, men zal zich moeten *herinneren* welke appels er al geteld zijn en welke niet. Dit betekent dat men de appels stuk voor stuk moet *markeren*, al was het alleen maar in gedachten. Maar zodra een element voorzien is van een merkteken, dan is het niet meer hetzelfde element als voordien. Elementen van een verzameling worden *veranderd* doordat ze worden geteld. Echter, dan is het ook niet meer één en dezelfde verzameling. De verzameling valt tijdens het tel-proces dus uiteen in twee verzamelingen: één voor de niet getelde, en één andere voor de getelde elementen. Alleen op die manier kan zelfs een kind begrijpen wat tellen is.

Dit alles zou heden ten dage niet verbazend meer moeten zijn. Tellen is immers een meting, een meting in zijn meest eenvoudige vorm. De quantummechanica leert ons (en dit wordt bevestigd door de ervaring van alledag) dat iedere vorm van meten een verstoring inhoudt. Uit het bovenstaande konkluderen wij dat bij het proces van het tellen tenminste twee verzamelingen zijn betrokken:

1. de verzameling appels die nog geteld moet worden ("toekomst");
2. de verzameling appels die al geteld is ("verleden").

De verzameling van de toekomst wordt vernietigd, terwijl de verzameling van het verleden gecreëerd wordt. Heeft dit iets te maken met het verschijnsel tijd? Eigenlijk is een klok een heel typisch meetinstrument; het is een *teller* namelijk. Dit in tegenstelling tot bijvoorbeeld een balans. Een teller die een ronde schaal heeft bovendien: de tijd is geneigd zich te herhalen, de wijzers draaien in het rond, er is een kringloop. Maar we dwalen af.

Een kind slaagt er niet in om een telwoord toe te kennen aan een aantal. Daarom ben ik eens in een aantal schoolboeken gaan neuzen, en ik moet tot mijn spijt bekennen: het verbaast me niets. Volgens de leermethode in deze boeken leren de kinderen inderdaad netjes de volgorde van de telwoorden. Daar is niets mee mis. Ook leren ze wanneer twee verzamelingen *evenveel* elementen hebben: breng een één-éénduidig verband aan tussen hun elementen. Maar ze leren helemaal *niet* hoe het komt dat je telwoorden kunt gebruiken om een *aantal* te bevatten, althans niet op een manier die een kind kan toepassen. Ongetwijfeld worden de leermethoden in onze lagere school boeken voor een deel afgeleid van inzichten die de moderne wiskunde te bieden heeft. Zo dient gelijkmatigheid van verzamelingen als basis om een kind inzicht in "evenveel" bij te brengen.

Een dergelijke mathematische theorie ligt er niet voor het werkelijke verband tussen ordinaalgetallen en kardinaalgetallen. Dit is voor een deel te wijten aan het feit dat de verzamelingenleer volkomen *statisch* is. Daardoor kan een verzameling niet veranderen, daardoor kunnen elementen niet worden gemerkt, daardoor kan in werkelijkheid dus niet worden geteld. Afgezien daarvan worden ordinaalgetallen in de klassieke wiskunde gedefinieerd door zekere "transitieve" verzamelingen, waarbij men alsmaar meer accoulaades zet om de lege verzameling heen. Hoe ga ik *zoiets* in vredesnaam aan een kleuter uitleggen?

5.6 Realistische getallen

We hebben gezien dat onnauwkeurigheid en verwaarlozing in de fysisch-technische praktijk aan de orde van de dag zijn. Ieder fysisch instrument bezit immers een beperkte meetnauwkeurigheid. Een waarneming kan dus

nooit "exakt" zijn. Echter, de materiële werkelijkheid is niet anders kenbaar dan werktuigelijk. Waar halen we dan het Idee vandaan dat deze realiteit zelf wel exakt zou zijn? Wat de reële getallen betreft kan het onderscheid, tussen wat wij omschreven hebben als Abstraktie en Idealisatie, in ieder geval scherp worden aangebracht:

Abstraktie van een reëel getal leidt tot een eindig aantal decimalen.

Idealisatie van een reëel getal leidt tot een oneindig aantal decimalen.

Men ziet hoe wederom het *oneindige* opduikt, als gevolg van het proces van idealisatie. Dit is blijkbaar stelselmatig het geval.

Ook exakte Natuurwetten zijn niet meer dan een illusie, een idealisatie van de feiten. Het kan niet vaak genoeg worden herhaald:

De materiële werkelijkheid zelf is niet exakt / niet ideaal, in zekere zin zelfs "slordig". Overall zit speling in. De natuur bezit een intrinsieke "vrijheid" die nimmer in een strikte beschrijving te vangen zal zijn.

Mogelijk is "vrijheid" dus niet iets wat exclusief eigen is aan de mens. Indien we aannemen dat de mens een zekere vrijheid kent, maar tevens zien dat die mens voortgekomen is uit een organische evolutie van pure materie, dan zou in de stof zelf iets terug te vinden moeten zijn van een zekere spontaneïteit, hoe gering ook. De menselijke vrijheid is dan slechts een accumulatie van stukjes vrijheid die besloten liggen in elk onderdeel van zijn ingewikkelde stoffelijke konstruktie [5]. Hoe het ook zij, we moeten gaan inzien dat deze vrijheid, de intrinsieke speling van de natuur, het vermogen van de werkelijkheid om niet star te zijn maar een beetje losjes in elkaar te steken, dat deze manier van *swingen* juist het wezen van het continuüm uitmaakt.

Degene die van de wiskundigen het dichtst in de buurt is gekomen van een vrije opvatting van de continuïteit is ongetwijfeld Brouwer. Het is immers Brouwer die het idee van de vrije keuzerijen heeft gelanceerd. Vrije keuzerijen zijn de konstruktieve manier bij uitstek om aan voldoende irrationale getallen te komen, nodig om het mathematische continuüm voldoende "dicht" te maken. De wetmatige getallen zoals π en $\sqrt{2}$ zijn daartoe te gering in aantal. Kort gezegd komt het hierop neer dat, bij een vrije keuzerij, er geen vaste regel is voor het vinden van de volgende decimaal van een reëel getal. In het extreme geval kan men een dobbelsteen nemen, en iedere volgende decimaal door het toeval laten bepalen. Bij een binaire representatie (neem een muntstuk: kruis 0 of munt 1) zou het resultaat, na een aantal worpen, er als volgt kunnen uitzien:

10101111100101101101111101110100100100010011111101101111011

Beperken we ons voor het gemak tot getallen tussen 0 en 1, dan hoeven we op deze manier alleen de mantisse te genereren. Dat de keuzerijen van Brouwer, fysisch gezien, ruwweg overeenkomen met geïdealiseerde meetgetallen is met enige verbeeldingskracht wel in te zien. Immers, ook bij

een meting moet men bijvoorbeeld maar afwachten hoe de opeenvolging van decimalen zich verder zal ontwikkelen. Maar laten we dit wat beter bekijken.

Een van de nauwkeurigste meetinstrumenten die de fysika heeft voortgebracht is de balans. Stelt u zich voor een volautomatische, *binaire* balans. De balans is voorzien van een serie gewichten. Ieder gewicht in de serie is precies twee keer zo zwaar als een ander. De balans is verder voorzien van een linker en een rechter schaal. Op de linker schaal kunnen we de onbekende massa plaatsen. Een sensor onder deze schaal vertelt aan de computer dat de balans dan niet meer in evenwicht is. Dit is de "te licht" sensor. Onder de rechter schaal bevindt zich een soortgelijke "te zwaar" sensor. Vervolgens zal onze computer gaan proberen door het rechts bijplaatsen van gewichten de balans in evenwicht te brengen. Begonnen wordt met het zwaarste gewicht. Is dit te zwaar, dan wordt het er weer afgenomen. Is het te licht dan laten we het staan. Vervolgens wordt het op een na zwaarste gewicht bijgeplaatst. Is dit te zwaar, dan wordt het er weer afgenomen. Is het te licht dan laten we het staan. Iedere keer vertellen de sensoren wat er moet gebeuren. Wanneer de linker sensor een signaal afgeeft, dan nemen we het gewicht er weer af, wanneer de rechter sensor een signaal afgeeft, dan laten we het staan. De signalen van de sensoren worden verwerkt en uitgeprint. Iedere keer als de "te zwaar" sensor reageert wordt er een 0 afgedrukt, immers het betreffende gewicht op de rechterschaal doet netto niet mee. Iedere keer als de "te licht" sensor reageert wordt er een 1 afgedrukt, ten teken dat het betreffende gewicht blijft staan. De machine stopt als er evenwicht is ingetreden, dat wil zeggen: als geen van beide sensoren nog ergens op reageert. Dan is de rij van enen en nullen niet alleen een binaire (vaste komma) representatie voor het gewicht op de linker schaal, maar tevens een fysische konkretisering van een keuzerij volgens Brouwer. Hiermee zijn we echter niet klaar. Een fysisch experiment is pas een fysisch experiment als het *herhaalbaar* is. Nu doet zich iets vreemds voor. Het zal namelijk blijken dat, wanneer het experiment herhaald wordt, bij gelijkblijvend gewicht op de linker schaal, we niet slechts *één* reeks digitale cijfers vinden, maar een hele *verzameling* van die reeksen.

Laten we nog een ander voorbeeld nemen. Hoe zou men in een primitieve praktische meetkunde, bijvoorbeeld ten tijde van de Babyloniërs, het getal π hebben bepaald? Mogelijk als volgt. Neem een flinke passer en teken daarmee een cirkel. Neem vervolgens een garen draad en prik die met behulp van spelden nauwkeurig vast langs de omtrek van de cirkel. Waar de twee eindjes elkaar ontmoeten de draad afknippen. Dan de draad losmaken en langs een meetlat leggen. Meet ook de diameter van de cirkel op. Deel nu de lengte van de draad door de diameter van de cirkel en noteer het resultaat. Het experiment wordt herhaald voor cirkels met verschillende

diameters. Er komt een rijtje getallen, dat er als volgt uit zou kunnen zien:

$$3.1415 \quad , \quad 3.1420 \quad , \quad 3.1409 \quad , \quad \dots$$

Met het team van experimenteerders de resultaten overziende, komen we tot een consensus, dat namelijk:

$$\pi = 3.1415 \pm 0.0007$$

Onze "primitieve" waarde van π bezit dus een *eindig* aantal decimalen. Daardoor kan ons getal " π " gemakkelijk (dat wil zeggen door middel van een eindig proces van inspectie) worden vergeleken met allerlei andere "rele" getallen. Bijvoorbeeld geldt dat: $3.1415 < 3.1420$. Toch is daarmee iets merkwaardigs aan de hand. Immers, zowel 3.1415 als 3.1420 staan krachtens onze meting voor het getal π . De verklaring wordt gevonden in de toevoeging " ± 0.0007 ". En iedere technicus weet wel wat dat is: de onvermijdelijke *onnauwkeurigheid* in de meetuitkomst. Deze "fout" betekent dat ieder getal in het interval $[3.1408 \dots 3.1422]$ min of meer gelijk is aan het transcendente getal π .

Wat formeler: er bestaat een getal δ zo dat, indien $|a - b| < \delta$ wij mogen zeggen dat a en b ongeveer gelijk zijn, ofwel dat $a \approx b$. Wanneer nu δ steeds kleiner wordt dan zal uiteindelijk zelfs a "exakt" gelijk worden aan b , zodat we mogen schrijven $a = b$. Merk hierbij op dat de onnauwkeurigheid δ wordt uitgedrukt in hetzelfde aantal decimalen als a en b zelf. De schaal waarop al deze getallen worden *geïdentificeerd* is dus fijner verdeeld dan de mate waarin a en b aan elkaar gelijk worden. Genoemde identifikatie zal geschieden door een Identiteit $\equiv$ met een zeker Opzicht I aan te wenden. Daar is niks mysterieus mee: men kijkt naar de decimalen (of naar de bits) en vergelijkt ze stuk voor stuk, op het oog. Wanneer toleranties ϵ en δ in een ongeveer-gelijkheid $\approx$ "naar nul gaan", dan krijgen we de klassieke (continue) gelijkheid terug. Ook het geval $\epsilon, \delta \rightarrow 0$ is dus een *klassieke limiet*. Wij benoemen in het bijzonder de laatste limiet met de term "exaktheid".

Opgemerkt wordt dat ook zuiver wiskundige methoden om π te bepalen in wezen niet verder komen dan de vaststelling dat het bewuste getal moet liggen in een zeker interval, dat begrensd wordt door twee andere, reeds "bekende" getallen. Beroemd zijn de "uitputtings" methoden van Aristoteles. Men kan zich voorstellen dat een cirkel steeds verder wordt ingesloten tussen een omgeschreven en een ingeschreven veelhoek. Ik vond het een aardig idee om dit na te spelen: zie de "Insluitingsmethode voor π ", opgenomen achterin als appendix.

In de klassieke analyse bestaat er een tegenstelling tussen de irrationale en de rationale getallen: een getal is *of* rationaal *of* irrationaal. Een uitsluitend-OF relatie die in een realistischer wiskundig bestel niet goed

is vol te houden. Immers, op het numerieke niveau worden irrationale getallen gedefinieerd door een interval van eindig veel rationale getallen. Dat wil om te beginnen zeggen: op een *schaal* van rationale getallen. Alle getallen op die schaal zijn *identificeerbaar*, ze hebben een eindige identiteit, een gelijkheid met een eindig aspect. Alle rationale getallen kunnen immers worden gerepresenteerd door een reeks van eindig veel decimalen (of binalen), of door een breuk (dat is een geordend paar) van twee natuurlijke getallen. (Van de laatste staat natuurlijkerwijs buiten kijf dat ze een eindige identiteit bezitten.) Zoals gezegd, op hun beurt worden irrationale getallen gedefinieerd door een interval van zulke identificeerbare rationale getallen. Dit betekent bijvoorbeeld ook dat er *meer rationale dan irrationale getallen* bestaan; zulks in schrille tegenstelling tot de klassieke opvatting. Het houdt verder in dat irrationale getallen niet goed van rationale getallen onderscheiden kunnen worden, zeker niet exclusief. Irrationale getallen zijn immers een konstruktie over de rationale getallen heen. Het enige wat men kan zeggen is het volgende: een irrationaal getal bezit, in tegenstelling tot een rationaal getal, *geen éénduidige identiteit*. Bekend is met name dat een irrationaal getal niet ondubbelzinnig als een breuk kan worden geschreven.

De reële getallen zijn uiteindelijk drijvende komma getallen ("floating point numbers") geworden in de supercomputers van tegenwoordig. Maar men hoeft niet naar een supercomputer te gaan om de werking van reële getallen praktisch te demonstreren. Het volgende BASIC programmaatje is voorbeeld van een toepassing, waarbij aan een leerling gevraagd wordt om korrekt in factoren te ontbinden:

```

10 REM *** Ontbinden in factoren ***
20 A=RND : B=RND : C=RND : D=RND : E=RND
25 F=RND : G=RND : H=RND : I=RND : J=RND
30 K=RND : L=RND : M=RND : N=RND : O=RND
35 P=RND : Q=RND : R=RND : S=RND : T=RND
40 U=RND : V=RND : W=RND : X=RND : Y=RND : Z=RND
45 REM Tot zover het minder intelligente gedeelte.
50 REM
55 INPUT "Vraag van de leraar: ",Q$
60 INPUT "Antwoord van de leerling: ",A$
65 REM
66 REM COMX-35 Basic Formule eVALuatie funktie:
70 Q1=FVAL(Q$) : A1=FVAL(A$)
76 REM Is een extensie; zit niet op een IBM-PC.
80 REM
85 IF ABS(Q1-A1)<.0007 THEN PRINT "Goed!" : GOTO 50
90 REM Omdat vraag en antwoord uitkomsten geven die

```

```

92 REM lichtelijk van elkaar kunnen verschillen !!!
95 REM
100 PRINT "Jammer!" : GOTO 60

```

Het programma werd als volgt gebruikt:

```

Vraag van de leraar:  $X^2 - 1$ 
Antwoord van de leerling:  $(X+1)*(X-1)$ 
Goed!

```

Er zijn geavanceerdere talen ontwikkeld, zoals APL, waarin het ongeveer gelijk van twee getallen op meer geëigende wijze is gedefinieerd. Hoewel het laatste nog maar de vraag is: ook bij APL blijft het een "fuzzy business". En voor alle duidelijkheid, indien men de regel met nummer 85 zou willen veranderen in:

```

85 IF Q1=A1 THEN PRINT "Goed!" : GOTO 50

```

dan zal men bemerken dat het programma niet meer onder alle omstandigheden een juist oordeel velt over de leerling prestaties. Dit is onvermijdelijk, typisch voor het werken met echte reële getallen. Er zijn onnoemelijk veel computerprogramma's waarin afbreek-kriteria van de vorm in regel 85 voorkomen, vooral technisch-wetenschappelijke programma's, die nu eenmaal uitgebreid met reële (lees: drijvende komma) getallen werken. Het zou een welhaast onmenselijke opgave zijn wanneer men ze in kaart zou willen brengen: alle iteratie-processen welke door een "gelijkheids" criterium van de vorm $|a - b| < \delta$ praktisch tot een goed einde worden gebracht.

5.7 Stelling van Brouwer

Een ander voorbeeld, dat ons dichter bij het doel brengt, is de berekening van een irrationaal getal, zoals $\sqrt{2}$.

```

10 REM *** Bereken de wortel uit 2 ***
20 A=1 : B=1
30 B=B/2 : K=A^2
40 IF K=2 THEN PRINT "Exakt!" : END
50 IF K>2 THEN A=A-B
60 IF K<2 THEN A=A+B
70 PRINT "Wortel uit 2 =" ; A ; ". Kwadraat = " ; K
80 INPUT N : GOTO 30

```

Draait men dit programma, dan zal men kunnen konstateren dat de exakte waarde in regel 40 nooit wordt gehaald. Dat was althans de ervaring op een

IBM PS/2. Het resultaat is in feite machine-afhankelijk. Theoretisch kan er best wel een micro-computer bestaan met een zodanige drijvende komma representatie dat er toevallig een A bestaat met $A^2 = 2$, maar dan faalt het experiment zodra men men voor 2 andere getallen invult, zoals in $A^2 = 3$ of $A^2 = 5$. We kunnen met betrekking tot de nauwkeurigheid van het resultaat nog wel het een en ander beredeneren. Stel dat de volgende eis wordt gesteld: het kwadraat van $\sqrt{2}$ moet gelijk zijn aan 2 met een nauwkeurigheid van $\epsilon < 10^{-9}$. Uit voorlopige berekeningen blijkt dat de wortel zelf kleiner is dan 1.5. Dus geldt voor de nauwkeurigheid $\delta \equiv |A - \sqrt{2}|$ van A zelf: $\epsilon \equiv |A^2 - 2| \equiv |A + \sqrt{2}||A - \sqrt{2}| < 3\delta$. Neem nu $\delta \equiv 0.3 \cdot 10^{-9}$ dan is de vereiste nauwkeurigheid ϵ in ieder geval verzekerd. Soortgelijke procedures komt men tegen bij de definitie van andere irrationale getallen. Bijvoorbeeld e , het getal van Euler, zou men kunnen definiëren als de waarde van x waarvoor de natuurlijke logaritme $\log(x)$ de waarde 1 aanneemt. De functie $\log(x)$ is hierbij gedefinieerd als een integraal $\int_1^x 1/t \, dt$ en kan louter op grond van elementaire bewerkingen numeriek worden berekend.

Epsilonontiek, ofwel redeneren met δ 's en ϵ 's, zoals hierboven, komt in de klassieke analyse buitengewoon veel voor. Het is zelfs zo dat veel van de wetmatige irrationale getallen worden gedefinieerd door middel van deze epsilonontiek. Heel in het algemeen ziet de methode er uit als volgt:

Vind bij een willekeurige gegeven $\epsilon > 0$ een nauwkeurigheid $\delta(\epsilon) > 0$ zodanig, dat uit $|x - a| < \delta$ volgt dat $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

In het voorbeeld van $\sqrt{2}$ is $f(x) = x^2$ en $f(a) = 2$. In het voorbeeld van e is $f(x) = \log(x)$ en $\log(e) = 1$. De irrationale getallen konden op die manier worden gedefinieerd omdat $f(a)$ aan de rechterkant gelijk is aan een duidelijk (rationaal) getal zoals 2 of 1. Dat was het numerieke verhaal.

Analytisch is de definitie simpelweg als volgt:

$x = \sqrt{2}$ dan en slechts dan als $x^2 = 2$;

$x = e$ dan en slechts dan als $\log(x) = 1$ met $\log(x) = \int_1^x dt/t$.

Numerieke en analytische formulering worden op een noemer gebracht door over te gaan op de volgende definitie:

Een reële functie van reële getallen heet duidelijk ter plaatse a dan en slechts dan als:

$$x = a \implies f(x) = f(a)$$

Hierin betekent $x = a$ hetzelfde als $|x - a| < \delta$ en $f(x) = f(a)$ hetzelfde als $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, volgens de regels der epsilonontiek (zie boven).

We hebben met opzet gekozen voor de term "duidelijk", omdat dit ten eerste een onderscheid oplevert met de klassieke analyse, en ten tweede hetzelfde betekent als het Duitse "eindeutig", waarvan "éénduidig" als Germanisme doorgedrongen is in de gebruikelijke wiskundige nomenclatuur. Overigens is het voor reële functies geen absolute vereiste dat zij overal

duidelijk zijn. We zullen straks voorbeelden tegenkomen van plaatselijk *onduidelijke* functies.

Verder is het duidelijk dat bij de verwerking van reële getallen steeds de *einduitkomst* $f(x)$ bepalend is. Dit omzeilt een aantal inconsistenties waar we in [13] mee te kampen hadden. Bij het rekenen met benaderde, dat zijn echte reële getallen heeft men namelijk altijd last van zogenaamde *fouten-voortplanting*. Dit wrekt zich in de eind-uitkomst, die daardoor als regel "onnauwkeuriger" is dan de getallen waar men van uitgaat. Nu is deze eind-uitkomst uiteraard een functie van genoemde getallen. Krachtens de methode van de epsilon-tiek is deze functie verzekerd van een van te voren vastgestelde onnauwkeurigheid ϵ . Daaruit rekent men terug, in de praktijk vaak met behulp van iteratie, welke onnauwkeurigheid de oorspronkelijke bestanddelen dan wel mogen bezitten.

Een iets ander voorbeeld. Stel dat drie reële getallen twee aan twee gelijk zijn aan elkaar: $a = b$ en $b = c$. Geldt dan ook dat $a = c$? Het bewijs gaat als volgt. Gegeven is dat $|a - b| < \delta_1$ en $|b - c| < \delta_2$. Daaruit volgt met de driehoeks-ongelijkheid: $|a - c| \equiv |a - b + b - c| \leq |a - b| + |b - c| < \delta_1 + \delta_2 < \epsilon$. Kies nu $\delta_1 \equiv \delta_2 \equiv \epsilon/2$. Dan blijft de einduitkomst binnen de perken. De konklusie luidt dat de transitieve eigenschap voor de gelijkheid blijft opgaan. Op soortgelijke manier kan men bewijzen dat allerlei andere rekenregels waar we aan gewend zijn geldig blijven. Bijvoorbeeld als $a = b$ en $c = d$, dan is nog steeds: $a + c = b + d$, $a - c = b - d$, $a \cdot c = b \cdot d$, $a/c = b/d$, het laatste uiteraard op voorwaarde dat $c = d \neq 0$.

Toch is er iets aan de hand met onze formulering van duidelijke functies. Het is alsof de definitie al in een ander verband is gebezigd. En dat klopt natuurlijk. Hier staat namelijk letterlijk ... de klassieke definitie van een *continue functie*:

Vind bij een willekeurige gegeven $\epsilon > 0$ een nauwkeurigheid $\delta(\epsilon) > 0$ zodanig, dat uit $|x - a| < \delta$ volgt dat $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Even wat zaken op een rijtje zetten. De gelijkheid van reële getallen hangt dus af van nauwkeurigheden δ en ϵ , op exakt dezelfde manier als in de klassieke analyse een continue functie is gedefinieerd. Maar dit betekent dat gelijkheid en continuïteit in de werkelijkheid door elkaar lopen. Ze zijn blijkbaar in het geheel niet van elkaar te onderscheiden. En dit is geheel en al wat ook door de grote Nederlandse wiskundige Brouwer, de grondlegger van het intuïtionisme, is ontdekt. Ons resultaat is, op details na, gelijkwaardig met de beroemde Stelling van Brouwer:

Iedere reële functie die op een interval van reële getallen duidelijk is (een "echte" functie dus), is tevens helemaal continu op dat interval.

We laten vervolgens een aantal signifikante voorbeelden de revue passeren.

De volgende funktie komt in de fysika geregeld op de proppen:

$$\text{sinc}(x) \equiv \begin{cases} \sin(x)/x & \text{voor } x < 0, x > 0 \\ 1 & \text{voor } x \equiv 0 \end{cases}$$

Het is natuurlijk niet toevallig dat $\text{sinc}(x)$ in het punt 0 uitgerekend 1 moet zijn. Alleen op die manier is $\text{sinc}(x)$ voor $x = 0$ een continue funktie. In het licht van de stelling van Brouwer kunnen we zelfs stellen dat alleen op deze manier $\text{sinc}(x)$ voor $x = 0$ *duidelijk* (lees: éénduidig) is, en daar een funktie is in de ware zin des woords.

Beschouw de Heaviside of sprong-funktie:

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 & \text{voor } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x \equiv 0 \end{cases}$$

We zien onmiddellijk dat $f(x)$ voor $x = 0$ niet duidelijk (OK: niet éénduidig) kan zijn, dus in $x = 0$ wel *onduidelijk* moet zijn. De funktie maakt daar immers een sprong, dus is ter plaatse niet continu. Het is onmogelijk om voor $x = 0$ duidelijkheid (: éénduidigheid) te forceren, ook niet door een los in de lucht hangende waarde $1/2$ op te geven. (Overigens kunnen wij er heel best mee leven wanneer een funktie hier en daar onduidelijk is.) Een en ander is volledig in overeenstemming met de fysische realiteit. Wanneer men Heaviside zichtbaar maakt op bijvoorbeeld een oscilloscoop, dan zal de elektronenstraal ter plaatse van de eigenlijke sprong geen tijd hebben om een spoor na te laten. Het is dus uitermate onduidelijk wat er in $x = 0$ gebeurt. En zeer zeker is het niet zo dat de funktie in $x = 0$ een voorkeur zou hebben voor de waarde $1/2$. Dit zou men op de volgende manier tot uitdrukking kunnen brengen:

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 & \text{voor } x > 0 \\ \text{ongedefinieerd} & \text{voor } x \equiv 0 \end{cases}$$

In feite doet het er namelijk niet toe met welke waarde de funktie ter plaatse $x \equiv 0$ wordt geïdentificeerd.

Beschouw de zogenaamde funktie van Lebesgue (tevens degene die de "maat-theorie" heeft bedacht, en dat is mogelijk niet wat u denkt):

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor alle rationale getallen} \\ 0 & \text{voor alle irrationale getallen} \end{cases}$$

In het licht van de stelling van Brouwer zou de "funktie" van Lebesgue het toppunt van onduidelijkheid zijn: de funktiewaarde fluctueert binnen

het gelijkheidsdomein van twee willekeurige reële getallen op onnaspeurbare wijze tussen 0 en 1. Niet alleen hier en daar, maar overal. Een dergelijke "functie" kunnen zelfs wij, dus niet alleen de intuïtionisten, geen functie meer noemen. Ze is nergens "éénduidig".

Beschouw tenslotte de afgeleide van de Heaviside functie: de functie van Dirac of delta-functie. De delta-functie is oneindig voor $x = 0$ en nul voor $x \neq 0$, zodanig dat de oppervlakte onder de "piek" niettemin gelijk is aan 1. In de theorie van de "distributies" wordt de ene oneindigheid, de hoogte van de piek, vervangen door een andere: een klasse met daarin een oneindig aantal functies. De delta-functie zou echter, helemaal niet met behulp van "distributies", als volgt gedefinieerd kunnen worden:

$$D(x) = \begin{cases} 1/h & \text{voor alle } -\frac{1}{2}h < x < +\frac{1}{2}h \\ 0 & \text{voor alle } x < -\frac{1}{2}h, x > +\frac{1}{2}h \end{cases}$$

Hierin is $h < \delta$ waarbij δ in verbondenheid met ϵ voldoet aan de vereisten der epsilontiek; verder is h een identificeerbaar getal (evenals trouwens δ en ϵ dat zijn). Een één-regelige definitie is zeer wel mogelijk:

$$D(x) = \max(0, \min((h+x)/h^2, (h-x)/h^2))$$

Merk op dat de definitie van een "oneigenlijke" functie zoals $D(x)$ hoegenaamd geen problemen oplevert. Dit komt uiteindelijk omdat wij een klaar beeld hebben van de manier waarop idealisatie van numerieke naar analytische formulering in de technisch-wetenschappelijke praktijk plaatsvindt. Zolang men maar beseft dat de zaken waar men mee bezig is in wezen *eindig* zijn, een ruwe ondergrond die een continu aanzien verwerft, enkel doordat identifikaties bij wijze van spreken "verdrinken" in allerlei (on)nauwkeurigheden.

Het belang van een fysische interpretatie van de Stelling van Brouwer reikt veel verder dan deze ene konstatering. Hier wordt namelijk aangetoond dat, in het algemeen, intuïtionistische resultaten fysische relevantie kunnen bezitten. Dit betekent dat zaken die in intuïtionistisch opzicht anders liggen dan "normaal", een gereede kans maken ook fysisch anders te liggen. Wij kunnen zodoende, op grond van onderzoek vanuit het intuïtionisme, bepaalde resultaten uit de klassieke wiskunde, bij voorbaat, aanmerken als risicodragend voor toepassingen buiten de deur. Dit hoeft achteraf niet te verbazen: de fysika is in zekere zin ultra-intuïtionistisch, al was het alleen maar vanwege het gegeven dat het oneindige een grootheid is die ook fysisch niet kan worden waargenomen.

5.8 Samenvatting

0. Men kan de ontwikkeling van het grondslagen-onderzoek alleen goed begrijpen wanneer zij wordt opgevat als historisch noodzakelijke begeleiding van het ontstaan van de digitale techniek en in het bijzonder van de computer.

1. De geschiedenis van de moderne wiskunde is doortrokken van een merkwaardige tweespalt. Enerzijds een mathematische logika en een verzamelingenleer, zoals die worden aangewend in de theorieën der zuivere wiskunde. Anderzijds een schakel-algebra, zoals die toepassing vindt bij het ontwerpen van digitale circuits. Een theorie en een praktijk die elkaar nauwelijks verstaan.

2. Het geeft te denken dat juist op het punt van de sequentiële schakelingen de wegen van theorie en praktijk zich splitsen. Het voornaamste gebrek van de theoretische logika is dat de theorie volkomen statisch is: de *tijd* zit er niet in.

3. Een mogelijke oplossing voor de "paradoxen der implicatie" [28] is een sequentiële interpretatie volgens [38]. Achterliggende gedachte is dat logische uitdrukkingen in de omgangstaal geoptimaliseerd worden, zoals in de compilerbouw praktijk is.

4. Er is materieel gezien geen verschil tussen een "los" element a en de verzameling $\{a\}$ die dat element als enige bevat. Dus: $\{a\} = a$.

5. Voor een fysisch verantwoorde opzet van de verzamelingenleer is het nodig en voldoende om het idee "deel zijn van" $\subset$ op te vatten als grondgedachte, en "element zijn van" $\in$ als een speciaal geval hiervan in te voeren.

6. Het idee dat equivalentierelaties een generalisatie zouden zijn van het gelijkheidsbegrip is onjuist. Equivalentierelaties kunnen in het geheel niet onderscheiden worden van een "gewone" gelijkheid. Iedere gelijkheid is reeds bij voorbaat "in een zeker opzicht".

7. Er kan geen verschil worden gemaakt tussen elementen en partities van een verzameling. Een elementenverdeling is hetzelfde als een klasse-indeling. Dit is consistent met de bewering dat er geen verschil bestaat tussen een gelijkheid en een equivalentierelatie.

8. A kan element zijn van zichzelf, maar dan en slechts dan als de triviale partitie $\{A\}$ van A wordt beschouwd. Dan is $A \in A$ en $\{A\} = A$. Indien er geen triviale partitie van A gegeven is, dan kan A geen element van zichzelf zijn. Dit lost mede de verzamelingen-paradox van Russell op.

9. Een "geordend paar" (a, b) kan zeker niet worden gedefinieerd door $\{a, \{a, b\}\}$, omdat geen twee verschillende elementen in een verzameling een deel gemeenschappelijk kunnen hebben.

10. Om dezelfde reden kunnen ordinaal-getallen niet worden gedefinieerd

door alsmaar meer accoulaades te zetten om de lege verzameling heen, zoals dat wordt gedaan in de zogenaamde "naieve" verzamelingenleer.

11. Elementen en verzamelingen kunnen hun rollen omwisselen. Er is een dubbele opvatting mogelijk van de verhouding tussen element en verzameling. Het zijn *duale* begrippen.

12. Dubbele opvattingen zijn er ook wanneer men overgaat tot unificatie van implicatie en deelverzameling, van logische equivalentie en gelijkheid.

13. De volkomen ontoereikende opzet van de klassieke verzamelingenleer is de hoofdschuldige in het drama dat Relationele Databases heet.

14. Volgens de school van Spencer Brown kan de ware aard van paradoxen worden toegelicht aan de hand van een fysisch paradigma, namelijk de oscillator.

15. Voor een kind op de lagere school is het verband tussen de rangtelwoorden (ordinaalgetallen) en hoeveelheden (kardinaalgetallen) moeilijk te leggen.

5.9 Aantekeningen

0. Het geeft te denken dat Alfred Tarski aan het begin van zijn boek het volgende schrijft: "In het oog van veel leken is de wiskunde thans een dode wetenschap". En verder: "zij heeft een ongewoon hoge graad van ontwikkeling bereikt, en is sindsdien versteend in starre volmaaktheid" [28]. Volmaaktheid!

1. Tarski is skeptisch aangaande de methodologie der empirische wetenschappen, een skepsis die ook in onze tijd nog steeds gerechtvaardigd lijkt te zijn.

2. Doordat de ontwikkeling van het logisch denken, opgevat volgens Tarski, dermate los staat van het werkelijke leven, kan men ook niet verwachten dat diezelfde logika ook maar enige invloed had kunnen uitoefenen op de politiek ten tijde van de Tweede Wereldoorlog. Alleen al de suggestie in die richting, als zou kennis van de huidige wiskunde de wereld kunnen verbeteren! Trouwens, waarom zouden deze theoretici zich plotseling willen inlaten met "de wereld"?

3. Tarski gebruikt in zijn boek de term "logistiek" als synoniem voor het vak "mathematische logika". Dit is, gezien het gebruik van dezelfde term in het bedrijfsleven, maar dan in een heel andere betekenis, enigszins verwarrend.

4. Wanneer het denken van de filosoof Wittgenstein zich heeft ontwikkeld van de "Tractatus" richting "Philosophische Untersuchungen", dan is het duidelijk dat, teneinde vordering te maken, men er goed aan doet het eerstgenoemde werk eenvoudig over te slaan.

5. Logika is, op zijn kortst gezegd: het uitrekenen van konklusies.
6. De rol van de veranderlijken is wel eens, heel treffend, vergeleken met die van de blanco gedeelten van een formulier, aldus Tarski. Dit is in ieder geval een veel betere opvatting als dat een variabele een *verzameling* waarden zou zijn.
7. Steun voor een elementloze formulering van de verzamelingeleer wordt ook gevonden in de CAD hoek, de zogenaamde "Constructive Solid Geometry" (CSG), waar door middel van Booleaanse bewerkingen eenvoudige ruimtelijke vormen met elkaar worden gekombineerd. Niemand is nieuwsgierig naar de "elementen" van zo'n geometrisch model.
8. Eenvoudig laat zich de (terug)weg van idealisatie beschrijven aan de hand van het gelijkheidsbegrip, tevens een belangrijk geval trouwens. Wij hebben de klassieke diskrete gelijkheid gematerialiseerd tot een lijken op $\equiv$ in een opzicht I van eindig veel eigenschappen. Deze aspektverzameling I zal de klassieke kollektie van "alle" predikaten beter benaderen naarmate zij meer eigenschappen bevat. Wanneer het aantal predikaten in de aspektverzameling I "naar oneindig gaat", dan krijgen we de klassieke diskrete gelijkheid weer terug. Het geval $|I| \rightarrow \infty$ is dus een *klassieke limiet*.
9. Aan de voormalige T.H. Eindhoven waren twee hoogleraren verbonden die zich intensief bezighielden met computers. De ene heette E.W. Dijkstra en de andere N.G. de Bruijn (geen familie van mij). Dijkstra ontwikkelde een theorie waarmee men in staat zou zijn de korrektheid van computer programma's te bewijzen. De Bruijn ontwikkelde een taal, genaamd AUTOMATH, waarmee omgekeerd de korrektheid van een mathematisch bewijs door de computer zou kunnen worden nagegaan. Duidelijk is hier sprake van een vicieuze cirkel: laat AUTOMATH de korrektheid van een bewijs volgens Dijkstra en laat een korrektheidsbewijs volgens Dijkstra de goede werking van AUTOMATH aantonen.

Hoofdstuk 6

CONTINUE BOVENBOUW

In het vorige hoofdstuk hebben wij vraagstukken uit de analyse benaderd vanuit de fundamentele, "bottom up". Voor een natuurkundige veel gemakkelijker dan deze fundamentele benadering is de "top down" aanpak. Deze gaat uit van een volledig ontwikkeld analytisch gereedschap. Een nadeel hiervan is dat het betoog alleen nog maar te volgen is door hen die een (hogere) scholing hebben gehad in met name de differentiaal- en integraalrekening. De nu volgende uiteenzetting is *nogal technisch*.

6.1 OperatorenRekening

Een voorbeeld van een techniek, die in de quantummechanica zonder scrupules wordt toegepast, maar in de officiële wiskunde op uiterst omzichtige en moeizame formuleringen stuit, is de OperatorenRekening. Operatoren zijn bewerkingen op functies, feitelijk dus functies van functies. Wat het soort bewerkingen betreft moet men in de eerste plaats denken aan *differentiëren en integreren*. Echter, als het aankomt op de toepassing van dit soort bewerkingen, dan blijken in de wiskunde plotseling aanzienlijke gewetensbezwaren naar voren gebracht te worden.

Laat ψ een functie zijn. Dan is de bewerking (d/dx) in $d\psi/dx$ een voorbeeld van een (differentiaal)operator. Maar ook vermenigvuldiging met een (andere) functie, bijvoorbeeld f , is een operator. Zoals (f) in $f\psi$. We hebben de volgende voor de hand liggende definities voor gelijkheid, sommen en produkten van operatoren α, β (en straks ook) γ , toegepast op

willekeurige functies ψ en ϕ :

$$[\alpha = \beta] \equiv [\alpha\psi = \beta\psi] \quad ; \quad (\alpha + \beta)\psi \equiv \alpha\psi + \beta\psi \quad ; \quad (\alpha\beta)\psi \equiv \alpha(\beta\psi)$$

Een operator heet *lineair* indien voldaan is aan de volgende twee eisen. Hierin is λ een scalair. Strikt genomen kan de tweede eis uit de eerste worden afgeleid:

$$\alpha(\psi + \phi) = \alpha\psi + \alpha\phi \quad ; \quad \alpha(\lambda\psi) = \lambda(\alpha\psi)$$

Wij beperken ons in het vervolg tot lineaire operatoren. Eenvoudig te bewijzen zijn de volgende Rekenregels:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad ; \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad ; \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta \quad ; \quad \alpha\lambda = \lambda\alpha$$

De rekenregels voor lineaire operatoren lijken sprekend op die van getallen. Op één enkele uitzondering na. En dat is eigenlijk het enige wat men van het rekenen met (lineaire) operatoren, in de praktijk, dient te onthouden. De commutatieve wet is NIET geldig:

$$\alpha\beta \neq \beta\alpha$$

Men definieert daarom de *commutator* van twee operatoren als:

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$$

Deze commutator is in het algemeen dus niet nul. Verder definiëren we nog een inverse en een menigmaal samengestelde functie:

$$[\beta = \alpha^{-1}] \equiv [\alpha\beta = 1] \quad ; \quad \alpha^n \equiv \alpha \dots \alpha \text{ (n termen)}$$

De produktregel voor het differentiëren luidt: $(f.\psi)' = f'.\psi + f.\psi'$. Ofwel:

$$\frac{d}{dx}(f.\psi) = \left(\frac{df}{dx}\right)\psi + \left(f.\frac{d}{dx}\right)\psi$$

Vervolgens wordt de (immers willekeurige) functie ψ weggelaten. Op grond van bovenstaande operator-definities moet dat kunnen. Men kan namelijk altijd uitkomen op een uitdrukking van de vorm $\alpha\psi = \beta\psi$. Hierin ψ laten staan biedt geen enkele extra informatie. Toch is uitgerekend dit het tere punt: een losse d/dx "betekent toch niks". De klassieke wiskunde heeft dus moeite met een daadwerkelijke abstractie, zoals deze:

$$\frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx} + f.\frac{d}{dx}$$

Hieruit leidt men vervolgens af de (niet-commutatieve) wet voor het samenstellen van een differentiaal- en een produkt-operator:

$$\left[\frac{d}{dx}, f \right] = \frac{d}{dx} f - f \frac{d}{dx} = \frac{df}{dx}$$

Na deling door f kan de eerdere formule ook worden geschreven als volgt:

$$f^{-1} \frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx} + \frac{f'}{f}$$

De breuk f'/f doet denken aan de afgeleide van $\log(f)$. Stellen we nu $f'/f = g$ dan is $\log(f) = \int g \, dx$, dus $f = \exp(\int g \, dx)$. Vervangen we tenslotte de naam g weer door de naam f , en verwisselen we nog even linker- en rechterlid, dan staat er:

$$\boxed{\frac{d}{dx} + f = e^{-\int f \, dx} \frac{d}{dx} e^{+\int f \, dx}}$$

Van de lezer wordt verwacht dat hij deze formule in zijn geheugen prent. Het is namelijk een uitermate bruikbaar resultaat, zoals we nu meteen aan de hand van een aantal voorbeelden zullen laten zien.

6.2 DifferentiaalVergelijkingen

Er worden drie voorbeelden gegeven van een toepassing van Operatoren-Rekening, op gewone differentiaalvergelijkingen.

6.2.1 Voorbeeld 1

Los op een gewone differentiaalvergelijking van de tweede orde in $y(x)$ met konstante coëfficiënten:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

De OperatorenRekening maakt het mogelijk dat wij zoveel mogelijk abstraheren van de oplossing $y(x)$:

$$\left[a \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + b \frac{d}{dx} + c \right] y(x) = 0$$

Wat we vervolgens gaan doen is, schrik niet: *ontbinden in factoren*. Dat we hiertoe worden aangezet, zit 'm in het feit dat de operator (d/dx) en de

konstantes a , b en c zich onderling gedragen *alsof* het gewone getallen zijn. Immers, de commutator van een differentiatie en een konstante is nul. De commutatieve wet was het enige waar we op moesten letten.

$$a \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + b \left(\frac{d}{dx} \right) + c = \left(\frac{d}{dx} - \lambda_1 \right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2 \right)$$

λ_1 en λ_2 zijn wortels van de zogenaamde *karakteristieke vergelijking*:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

De differentiaalvergelijking is hiermee te herschrijven als:

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda_1 \right) \left(\frac{d}{dx} - \lambda_2 \right) y(x) = 0$$

We gaan nu de "uitermate bruikbare formule" uit het vorige hoofdstuk gebruiken:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} - \lambda_{1,2} &= e^{-\int -\lambda_{1,2} dx} \frac{d}{dx} e^{+\int -\lambda_{1,2} dx} \\ &= e^{\lambda_{1,2}x} \frac{d}{dx} e^{-\lambda_{1,2}x} \end{aligned}$$

Zodat de D.V. uiteindelijk wordt:

$$e^{\lambda_1 x} \frac{d}{dx} e^{-\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \frac{d}{dx} e^{-\lambda_2 x} y(x) = 0$$

Stelselmatige integratie is nu mogelijk:

$$e^{-\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \frac{d}{dx} e^{-\lambda_2 x} y(x) = C_1 \quad ; \quad e^{-\lambda_2 x} y(x) = C_1 \int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx$$

Zoals gezegd is λ op te lossen uit $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, een vierkants vergelijking met diskriminant: $D = b^2 - 4ac$. Men onderscheidt twee afzonderlijke gevallen.

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\int e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} dx = \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2$$

Dit geeft als oplossing:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad C_1, C_2 \text{ willekeurig}$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$\int dx = x$$

Dit geeft als oplossing:

$$y(x) = e^{\lambda x} [C_1 \cdot x + C_2] \quad C_1, C_2 \text{ willekeurig}$$

Bovenstaande afleiding staat in schril contrast met heuristieken in officiële lezingen over differentiaalvergelijkingen. Het bijzondere is dat zij eigenlijk *geheel vanzelf*, rechttoe rechtaan verloopt. Het is helemaal niet nodig om bij voorbaat allerlei wonderlijke veronderstellingen te maken over de vorm van de oplossing. Met name zijn er geen speciale aannames nodig voor het geval $\lambda_1 = \lambda_2$. Er komt niets zomaar "uit de lucht vallen".

6.2.2 Voorbeeld 2

Los vervolgens op de differentiaalvergelijking van Euler in $y(x)$, a en b konstant:

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

Wij abstraheren zoveel mogelijk van de oplossing $y(x)$:

$$\left[x^2 \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + ax \frac{d}{dx} + b \right] y(x) = 0$$

Gebruik de commutator $[d/dx, x] = 1$ om $x \cdot d/dx$ te veranderen in $d/dx \cdot x - 1$ en daarmee $x \cdot (x \cdot d/dx) \cdot d/dx$ in $x \cdot d/dx \cdot x \cdot d/dx - x \cdot d/dx$. Dit is nodig om de D.V. een beetje te herschrijven, namelijk als volgt:

$$\left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^2 + (a-1) \left(x \frac{d}{dx} \right) + b \right] y = 0$$

We pogen te ontbinden in factoren:

$$\left(x \frac{d}{dx} \right)^2 + (a-1) \left(x \frac{d}{dx} \right) + b = \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_1 \right) \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_2 \right)$$

λ_1 en λ_2 zijn wortels van de karakteristieke vergelijking:

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$$

De differentiaalvergelijking van Euler is hiermee te herschrijven als:

$$\left(x \frac{d}{dx} - \lambda_1 \right) \left(x \frac{d}{dx} - \lambda_2 \right) y(x) = 0$$

Ofwel:

$$x \left(\frac{d}{dx} - \frac{\lambda_1}{x} \right) x \left(\frac{d}{dx} - \frac{\lambda_2}{x} \right) y(x) = 0$$

We gaan weer de in het vorige hoofdstuk omkaderde formule gebruiken:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} - \lambda_{1,2} &= e^{-\int -\frac{\lambda_{1,2}}{x} dx} \frac{d}{dx} e^{+\int -\frac{\lambda_{1,2}}{x} dx} \\ &= e^{\lambda_{1,2} \log(x)} \frac{d}{dx} e^{-\lambda_{1,2} \log(x)} = x^{\lambda_{1,2}} \frac{d}{dx} x^{-\lambda_{1,2}}\end{aligned}$$

Zodat de D.V. uiteindelijk wordt:

$$x \cdot x^{\lambda_1} \frac{d}{dx} x^{-\lambda_1} x \cdot x^{\lambda_2} \frac{d}{dx} x^{-\lambda_2} y(x) = 0$$

Stelselmatige integratie is nu mogelijk:

$$x^{-\lambda_1} x \cdot x^{\lambda_2} \frac{d}{dx} x^{-\lambda_2} y(x) = C_1 \quad ; \quad x^{-\lambda_2} y(x) = C_1 \int x^{\lambda_1 - \lambda_2 - 1} dx$$

Zoals gezegd is λ op te lossen uit $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$, een vierkants vergelijking met diskriminant: $D = (a-1)^2 - 4b$. Men onderscheidt twee afzonderlijke gevallen.

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\int x^{\lambda_1 - \lambda_2 - 1} dx = \frac{x^{\lambda_1 - \lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2} + C_2$$

Dit geeft als oplossing:

$$y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2} \quad C_1, C_2 \text{ willekeurig}$$

b) $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$\int x^{-1} dx = \log(x)$$

Dit geeft als oplossing:

$$y(x) = x^\lambda [C_1 \cdot \log(x) + C_2] \quad C_1, C_2 \text{ willekeurig}$$

Ook hier is het niet nodig om vooronderstellingen te doen over de vorm van de oplossing. Men komt op volkomen natuurlijke wijze tot resultaat.

6.2.3 Voorbeeld 3

Als laatste voorbeeld lossen we op de volgende differentiaalvergelijking:

$$r \frac{d^2 p}{dr^2} + (2 - v_0 r) \frac{dp}{dr} - 2v_0 p = 0$$

Hierin is: p = onbekende functie (een soort druk), r = radiale afstand (tot de zon), v_0 = geschaalde snelheid (van de zonnewind). Deze vergelijking komt tevoorschijn bij vereenvoudiging van een ingewikkelder probleem: een mathematisch model voor berekening van de anomale komponent van de kosmische straling in de heliosfeer [FTP]. Dit terzijde. Ontbinden we in factoren:

$$r \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) \left(\frac{d}{dr} - v_0 \right) p = 0$$

Basisformule gebruiken:

$$r \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 e^{v_0 r} \frac{d}{dr} e^{-v_0 r} p = 0$$

Systematische integratie:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} e^{-v_0 r} p &= C_1 \frac{e^{-v_0 r}}{r^2} \\ p(r) &= C_1 e^{v_0 r} \int \frac{e^{-v_0 r}}{r^2} dr + C_2 e^{v_0 r} \end{aligned}$$

We hebben dus de volgende elementaire oplossingen:

$$\begin{aligned} p_1(r) &= e^{v_0 r} \int \frac{e^{-v_0 r}}{r^2} dr \\ p_2(r) &= e^{v_0 r} \end{aligned}$$

De integraal kan verder worden uitgewerkt met behulp van partiële integratie. Substitueer $t = -v_0 r$:

$$\int \frac{e^t}{t^2} dt = -\frac{e^t}{t} + \int \frac{e^t}{t} dt$$

Daarmee komt er voor de eerste oplossing:

$$p_1(r) = \frac{1}{v_0 r} + e^{v_0 r} \cdot Ei(-v_0 r)$$

Hierin is Ei de zogenaamde *exponentiële integraal*, waarvan bekend is dat zij niet in een gesloten vorm kan worden berekend:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

Voor wie het niet gelooft kan de uitkomst worden gecontroleerd met behulp van een Computer Algebra Systeem. We gebruikten hiervoor het CAS pakket MAPLE:

```

p:=1/(v0*r)+exp(v0*r)*Ei(-v0*r);
r*diff(diff(p,r),r)+(2-v0*r)*diff(p,r)-2*v0*p;
simplify("");
quit;

```

Onnodig op te merken dat de uitkomst inderdaad keurig nul wordt.

6.3 Laplace en statistiek

Bekend vanuit de quantummechanica is het volgende: de wet van behoud van impuls wordt afgeleid van translatie-symmetrie. Wanneer men een fysisch systeem kan verplaatsen zonder dat daarbij zijn eigenschappen veranderen, dan geldt in dat systeem impulsbehoud. Maar de grondslag van deze stelling is puur mathematisch, en kan als volgt worden begrepen. Zetten we op de reeksontwikkeling van een functie $f(x + \xi)$ rondom x :

$$f(x + \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} f^{(k)}(x) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\xi \frac{d}{dx} \right)^k \right] f(x)$$

In de uitdrukking tussen vierkante haken herkennen wij de reeksontwikkeling van e^x , zodat we symbolisch kunnen schrijven:

$$f(x + \xi) = e^{\xi \frac{d}{dx}} f(x)$$

Beschouw naar aanleiding hiervan een willekeurige convolutie-integraal:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \phi(x - \xi) d\xi$$

Convolutie integralen komen vaak voor. Bij een lineair systeem is de respons op een verstoring de convolutie-integraal van die verstoring met de zogenaamde eenheids-respons. De eenheids-respons is de manier waarop het systeem reageert op de allereenvoudigste verstoring, dat is een steile piek van zeer korte duur op het tijdstip nul, een "delta-functie". Convolutie integralen kunnen we met behulp van de operator-uitdrukking voor $f(x - \xi)$ als volgt herschrijven:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{-\xi \frac{d}{dx}} d\xi \quad \phi(x)$$

De integraal in deze uitdrukking komt ons, als het goed is, zeer bekend voor. Heel "toevallig" is dit namelijk juist de (dubbelzijdige) Laplace transformatie:

$$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) e^{-\xi p} d\xi$$

De integraal van Laplace komt dus heel spontaan te voorschijn bij elementaire beschouwingen over convolutie-integralen in combinatie met OperatorenRekening. De formule voor de convolutie-integraal laat zich nu ook als volgt schrijven:

$$H\left(\frac{d}{dx}\right)\phi(x)$$

Dat Laplace transformaties een bijzonder krachtig middel zijn om differentiaal vergelijkingen op te lossen, kan men nu licht inzien. Stel dat we een lineaire inhomogene differentiaal vergelijking hebben, in het algemeen van de vorm:

$$D\left(\frac{d}{dx}\right)\phi(x) = f(x)$$

Dan kunnen we met OperatorenRekening de oplossing onmiddellijk schrijven als:

$$\phi(x) = \frac{1}{D\left(\frac{d}{dx}\right)}f(x)$$

Stel $H(d/dx) = 1/D(d/dx)$, dan luidt de opgave: vindt de omgekeerde Laplace transformatie van $H(p)$. Noem deze voor het gemak $h(x)$. De oplossing vinden gaat dan verder helemaal volgens bovenstaand recept:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)f(x-\xi)d\xi$$

Onderzoek de Laplace getransformeerde van $\exp(-\mu t^2)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt}e^{-\mu t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu x^2}dx.e^{p^2/4\mu} = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}e^{p^2/4\mu}$$

met behulp van: $x = t + p/2\mu$. Laplace getransformeerde H en omgekeerd Laplace getransformeerde h hangen na vervanging van $1/4\mu$ door $1/2\sigma^2$, als volgt met elkaar samen:

$$H(p) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 p^2} \iff h(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2\sigma^2}$$

Een convolutie integraal met daarin de normale verdeling $h(t)$ is dus met behulp van OperatorenRekening te schrijven als:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\phi(x-\xi)d\xi = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dx^2}}\phi(x)$$

De fysische betekenis hiervan is dat de operator $\exp(\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dx^2})$ de functie $\phi(x)$ volgens een Gauss functie "uitsmeert" over gebiedjes met afmetingen van de orde σ . Dergelijke operatoren zullen blijken van pas te komen

wanneer we de klassieke analyse via een "top down" benadering op Toepasbaarheid willen onderzoeken.

Bovengenoemde "top down" benadering van de analyse is geen uitvinding van onszelf. Ze staat van oudsher bekend onder de naam WaarschijnlijkheidsRekening of Statistiek. In de Statistiek spreekt men van "moment genererende functies", dat zijn de verwachtingswaarden van de exponentiële functie $\exp(pt)$; dus met andere woorden: Laplace getransformeerden van kansdichtheden. Volgens het Statistisch Compendium [41] vinden we voor de moment genererende functie van de Normale (Gauss) Verdeling, nogmaals:

$$M(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] e^{tx} dx =$$

$$\frac{e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right] dx = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

De dienovereenkomstige Normale "uitsmeer"-operator is in het algemeen dus:

$$M\left(\frac{d}{dx}\right) = e^{\mu \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dx^2}} = e^{\mu \frac{d}{dx}} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{d^2}{dx^2}}$$

Maar de uitkomst is ook direkt toepasbaar op het volgende probleem. Beschouw de (partiële differentiaal)vergelijking voor diffusie van warmte in ruimte en tijd:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Maak hiervan in eerste instantie:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial t} T = \lambda a \frac{\partial^2}{\partial x^2} T$$

Vervolgens nemen we aan beide zijden de exponent van de operator ter plaatse:

$$e^{\lambda \partial / \partial t} T = e^{\lambda a \partial^2 / \partial x^2} T$$

Aan beide kanten staan operator-expressies die met de zojuist verworven kennis kunnen worden omgezet in klassieke uitdrukkingen:

$$T(x, t + \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) T(x - \xi, t) d\xi$$

Hierin is, met $\frac{1}{2}\sigma^2 = \lambda a$:

$$h(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$$

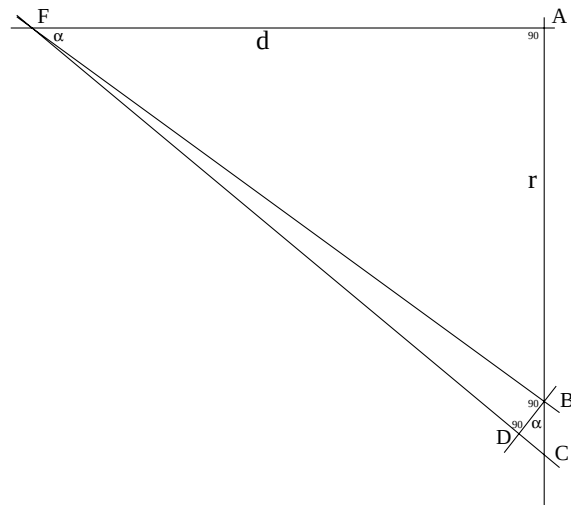
Verwissel nu t en λ , en stel vervolgens $\lambda = 0$. Dan vinden we, langs een uiterst korte route, de oplossing van de diffusie-vergelijking:

$$T(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi at}} e^{-\xi^2/(4at)} T(x - \xi, 0) d\xi$$

6.4 Wazige Optiek

Mijn oudste zoon zei laatst tegen me: "je moet je ogen half dicht doen, dan zie je het beter". Ik denk dat dit het wezen van de continuïteit goed weergeeft. Tijdens de natuurkundelessen op de middelbare school werd vroeger een stukje geometrische optika behandeld: holle en bolle spiegels en dito lenzen. Daarbij wordt als vanzelfsprekend uitgegaan van een *scherp* beeld, als we praten over de beeldafstand. Ik stel voor om deze goede gewoonte even te laten varen, en in plaats daarvan nu eens een *wazig* beeld onder de loep te nemen.

In de volgende figuur zien we, sterk uitvergroot, de meetkunde van een wazige afbeelding weergegeven:



Gewoonlijk wordt een scherp beeld gevormd op de plaats F . Echter we gaan nu met het vlak van beeldvorming een beetje naar rechts staan over een afstand d . Beschouw een zeer smalle lichtbundel FBC . Deze waaiert langzaam uit en treft het beeldvlak over een oppervlak BC . Omdat de

lichtbundel zeer smal is, zijn de beide hoeken FBD en FDB vrijwel 90 graden. Dit betekent dat hoek CBD vrijwel gelijk zal zijn aan hoek BFA . Noem deze hoek α . We berekenen de lichtdichtheid P op het vlakje BC . Neem aan dat het licht afkomstig is van een puntvormige lichtbron die een sterkte van 1 heeft, dan is: $P = \cos(\alpha)/2\pi R^2$ (: halve bol). Hierin is $\cos(\alpha) = d/R$ en $R = \sqrt{r^2 + d^2}$. Wanneer we het vlakje BC tot een punt samentrekken, dan vinden we voor de lichtsterkte ter plaatse de volgende "exakte" uitdrukking:

$$P(r) = \frac{d/2\pi}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

Merk op dat de afleiding met behulp van twee (ongeveer) rechte hoeken FBD en FDB pas achteraf, bij de limietovergang, gerechtvaardigd wordt. Dit nu is een typisch voorbeeld van een "afleiding met pijn", zoals die in de technische wetenschappen vaak wordt toegepast.

Merk een paar dingen op. Ten eerste dat er opnieuw een scherp beeld ontstaat (om precies te zijn een delta-functie) zodra de afstand d nadert tot nul. Integratie van de gevonden formule over het hele beeldvlak moet uiteraard een totale lichtopbrengst van 1 geven. We kunnen dit controleren:

$$\iint \frac{d/2\pi}{(r^2 + d^2)^{3/2}} r \cdot dr \cdot d\phi = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{r/d \cdot d(r/d)}{[(r/d)^2 + 1]^{3/2}} = -\frac{2}{2} \cdot [x^{-1/2}]_1^\infty = 1$$

Nemen we in plaats van de puntvormige lichtbron een lijn, dan moet de functie P langs die lijn worden geïntegreerd. Langs de lijn wordt gemeten met een lengte l . De straal r in bovenstaande formules is dan gelijk aan $p^2 + l^2$, waarin p de afstand van een punt (x, y) tot de lijn is. De integratie loopt dan als volgt:

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d/2\pi}{(p^2 + l^2 + d^2)^{3/2}} dl = \frac{d/2\pi}{p^2 + d^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \left(\frac{l}{\sqrt{p^2 + d^2}} \right)}{\left[1 + \left(\frac{l}{\sqrt{p^2 + d^2}} \right)^2 \right]^{3/2}} \\ &= \frac{d/2\pi}{p^2 + d^2} \left[\frac{x}{(1 + x^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{d/2\pi}{p^2 + d^2} \cdot 2 \end{aligned}$$

Wanneer de vergelijking van de lijn gegeven is door $ax + by + c = 0$, dan wordt de afstand van een punt (x, y) tot de lijn middels een bekende formule gegeven door $p = (ax + by + c)/\sqrt{(a^2 + b^2)}$. Hiermee is de lichtsterkte verdeling van een wazige afbeelding van een lijn:

$$L(x, y) = \frac{d/\pi}{(ax + by + c)^2/(a^2 + b^2) + d^2}$$

Dit is een functie die in de statistiek bekend staat als een Cauchy verdeling. Ook nu wordt voor $d \rightarrow 0$ weer een scherp plaatje verkregen, en is de integrale lichtsterkte gelijk aan 1.

In het algemeen kunnen we een scherpe figuur omzetten in een wazige afbeelding op de volgende manier. Stel dat we van een "punt" de wazige afbeelding kennen. We noemen deze "eenheids" afbeelding: $h(x)$. Maar iedere scherpe figuur wordt natuurlijk punt voor punt afgebeeld. Noem de scherpe figuur $f(x)$, dan is de lichtsterkte van alleen de funktiewaarde $f(x)$ ter plaatse ξ gelijk aan $f(\xi)h(x - \xi)$. Dit moeten we vervolgens integreren over het hele beeldvlak, om de wazige afbeelding F van f te krijgen:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)h(x - \xi) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)f(x - \xi) d\xi$$

Deze uitdrukking staat bekend als een *convolutie integraal*. De afleiding werd gegeven voor het ééndimensionale geval, maar het idee gaat natuurlijk net zo goed op voor de twee dimensies van het beeldvlak.

Beelden we bijvoorbeeld in plaats van de lijn een lichtend halfvlak wazig af. Het scherpe beeld is in dit geval een Heaviside of sprong funktie $H(p)$. Dan is met behulp van het bovenstaande:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d/\pi}{\xi^2 + d^2} H(p - \xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^p \frac{d \left(\frac{\xi}{d} \right)}{\left[1 + \left(\frac{\xi}{d} \right)^2 \right]} d\xi = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{p}{d}\right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{ax + by + c}{d\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wederom wordt voor $d \rightarrow 0$ een scherp plaatje $H(p)$ verkregen.

Anders dan de titel van dit hoofdstuk deed vermoeden, is het maken van wazige afbeeldingen *exakt* te beschrijven, met middelen van de klassieke analyse. Niet voor niets zijn we ons te buiten gegaan aan een overdaad van mathematische formules. Er is strikt genomen niets wazigs aan het idee van een wazige optiek.

6.5 Tastbare funkties

Het wezen van continuïteit is de wazige opname. Het is zinvol de resultaten uit het vorige hoofdstuk in deze betekenis te generaliseren. Beloofd wordt dat zulks zal gebeuren op een niveau dat nauwelijks elementair te noemen is. Het hele gereedschap van de klassieke analyse is bij de formulering reeds volop in bedrijf. De fysische betekenis van dit alles is het volgende.

Een functie is pas echt "reëel" als hij nagemeten kan worden. Dat nameten ging met een stukje optiek, apparatuur die een licht-zinnige interactie met de functie in kwestie aangaat. Maar voor hetzelfde geld hadden we een andere zintuiglijke waarneming ingezet, bijvoorbeeld de tastzin. Ik had een hoofdstuk "Voelsprietten" kunnen schrijven. Ook voelsprietten hebben een zekere onnauwkeurigheid, zodat de functiewaarden worden uitgesmeerd over een gebied ter grootte h . (Merk op dat er een cirkel-definitie ontstaat wanneer de voelspriet zichzelf wil nameten.) In het ideale geval nadert de onnauwkeurigheid h tot nul. Deze idealisatie is belangrijk in verband met het correspondentie principe: ze geeft ons het bruikbare deel van de klassieke analyse terug.

In het algemeen zal men in het midden laten welke van de vijf zinnen bij het waarnemen van een functie wordt ingezet. Dit komt tot uiting in de nu volgende werk-definitie:

De zin $\tilde{f}$ van een reële functie f is:

$$\tilde{f} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} D(t, h) f(x - t) dt$$

Spreek bijvoorbeeld uit als: " $\tilde{f}$ is f in de zin van D ". Hierin is de filter $D(x, h)$ een "tast" functie met de volgende eigenschappen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D(t, h) dt = 1 \quad ; \quad \lim_{h \rightarrow 0} D(x, h) = 0 \quad \text{voor alle } x \neq 0$$

Met andere woorden: de tast-functie convergeert naar de delta-functie. De precieze keuze van de tast-functie is daarom in feite niet erg belangrijk. Voorbeelden van tast-functies:

$$D1(x, h) = \begin{cases} 1/h & \text{voor } -\frac{1}{2}h < x < +\frac{1}{2}h \\ 0 & \text{voor } x < -\frac{1}{2}h \text{ of } x > +\frac{1}{2}h \end{cases}$$

$$D2(x, h) = \frac{h/2\pi}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \quad ; \quad D3(x, h) = \frac{h/\pi}{(x^2 + h^2)} \quad : \text{ Wazige Optiek}$$

$$D4(x, h) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2h^2} \quad : \text{ OperatorenRekening}$$

Gebruik vooreerst de eenvoudigste tast-functie; dat is $D1$. Dan is:

$$\tilde{f}(x, h) = \int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} f(t) dt / h = \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} f(x-t) dt / h$$

Ontwikkel f in een Taylor-reeks, als volgt:

$$f(x-t) \approx f(x) - f'(x).t + f''(x).\frac{1}{2}t^2 \quad \implies$$

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} f(x-t) dt \approx f(x) \cdot h - f'(x) \cdot 0 + f''(x) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{3} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{f}(x) \approx f(x) + \frac{1}{24} h^2 f''(x)$$

Deze formule is geldig voor "nette", continue en differentieerbare functies. Nemen we bijvoorbeeld de functie $f(x) = x^2$, dan krijgen we een parabool die iets naar boven verschoven is:

$$\tilde{x}^2 = x^2 + \frac{1}{12} h^2$$

Gebruiken we in plaats van $D1$ de Gauss-functie $D4$, dan komt er eenvoudiger:

$$\tilde{x}^2 = x^2 + h^2$$

Als volgende voorbeeld nemen we een functie die een "knik" heeft, namelijk $f(x) = |x|$, of uitgeschreven:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{voor } x \leq 0 \\ +x & \text{voor } x \geq 0 \end{cases}$$

Omdat de functie differentieerbaar is in dat gebied vinden we

$$\text{voor } x < -\frac{1}{2}h \text{ en voor } x > +\frac{1}{2}h : \tilde{f}(x) = |x|$$

In de buurt van de knik moeten we wat voorzichtiger zijn, dat is voor $-\frac{1}{2}h < x < +\frac{1}{2}h$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{x-\frac{1}{2}h}^{x+\frac{1}{2}h} f(t) dt &= \frac{1}{h} \left[\int_{x-\frac{1}{2}h}^0 (-t) dt + \int_0^{x+\frac{1}{2}h} (+t) dt \right] = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}h)^2 + \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}h)^2}{h} = \frac{x^2}{h} + \frac{1}{4}h \end{aligned}$$

Dit is een stuk van een parabool, met een dal ter waarde $h/4$ in $x = 0$. Inderdaad is voor $x = \pm \frac{1}{2}h$: $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}h$. De parabool sluit netjes aan op de rest van de afgetaste functie $\tilde{f}$. Gebruiken we in plaats van $D1$ de Gauss-functie $D4$, dan komt er uiteindelijk:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \left[2x \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2/h^2} dt + h^2 e^{-\frac{1}{2}x^2/h^2} \right]$$

Ook deze functie konvergeert voor $x \rightarrow \pm\infty$ netjes naar $|x|$.

Beschouw nogmaals de Heaviside of sprong-functie, van dichterbij als toen we de stelling van Brouwer behandelden:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < 0 \\ 1 & \text{voor } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{voor } x = 0 \end{cases}$$

Wanneer we dit ding aftasten met de voelspriet $D1$ dan vinden we voor de zin $\tilde{f}$ van f :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < -h/2 \\ 1 & \text{voor } x > +h/2 \\ x/h + 1/2 & \text{voor } -h/2 < x < +h/2 \end{cases}$$

Nemen we de limiet voor $h \rightarrow 0$, dan wordt de functie van Heaviside teruggevonden voor $x < 0$ en $x > 0$, echter *niet* voor $x = 0$. Dit betekent dat f geen zin heeft voor $x = 0$, niet precies aangevoeld kan worden in het punt $x = 0$. Proberen we in plaats van $D1$ de tastfunctie $D3$ dan vinden we een resultaat dat we hierboven al hadden afgeleid: $1/2 + 1/\pi \arctan(x/h)$. Ook deze functie convergeert niet naar $1/2$ voor $h \rightarrow 0$. De sprong functie is ter plaatse $x = 0$ *onzinnig*. Gebruiken we in plaats van $D1$ de Gauss-functie $D4$, dan komt er:

$$\tilde{f}(x) = \frac{2}{h\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2/h^2} dt + \frac{1}{2} \right]$$

Afgeleide van de sprong-functie is de delta-functie, overigens in de klassiek mathematische opvatting geen echte maar een "oneigenlijke functie":

$$f(x) = \begin{cases} \infty & \text{voor } x = 0 \\ 0 & \text{voor } x \neq 0 \end{cases}$$

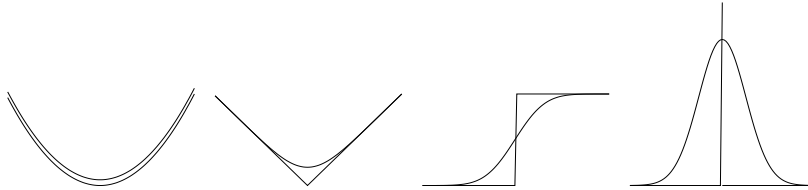
$$\text{Zodanig dat: } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Integratie levert:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x < -h/2 \text{ en voor } x > +h/2 \\ 1/h & \text{voor } -h/2 < x < +h/2 \end{cases}$$

Dat is de tastfunctie zelf. Dit is natuurlijk niet toevallig. Gebruiken we in plaats van $D1$ de Gauss-functie $D4$, dan komt wegens de diafragma-eigenschap ook dezelfde Gauss-functie weer tevoorschijn.

De vier functies worden, tezamen met hun (eindige) gevoelswaarden volgens een normale (Gauss-) verdeling $D4$, weergegeven in de volgende figuur. Details: $-1 \leq x \leq +1$ en $h = 0.25$.



Merk op dat het uitsmeer effect van de tast-functie des te voelbaarder is naarmate de gemeten functie f ter plaatse minder "netjes" is. Het is belangrijk om dit te onthouden.

Beschouw nog één keer de "functie" van Lebesque:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{voor alle rationale getallen} \\ 0 & \text{voor alle irrationale getallen} \end{cases}$$

De zin $\tilde{f}$ van deze functie is te bepalen met behulp van de zogenaamde "maat" theorie, ook van Lebesque. De uitkomst is: $\tilde{f} = 0$. Dit betekent dat $f(x)$ geen zin verschillend van nul heeft. We kunnen ook zeggen: op het gevoel is $f(x)$ nul, of de functie ziet er uit alsof hij helemaal nul is.

Nu is het redelijk te veronderstellen dat het aftasten van een functie met een ideale voelspriet niets anders naar voren brengt dan de functie zelf. Er zullen in de materiële werkelijkheid geen functies zitten "achter" functies die al op de perfecte manier gemeten zijn, geen realiteit achter een reeds toereikend geïdealiseerde realiteit, geen verdere verborgen parameters, niet nog meer wiskunde achter de wiskunde. In het algemeen behoort dus de zin van een functie gelijk te zijn aan de functie zelf:

$$f(x) = \tilde{f}(x)$$

(Dit is feitelijk de "diafragma-eigenschap" van de delta-functie voor "fatsoenlijke" functies.) Het is duidelijk dat alle "nette" functies ook *zinnig* zijn. Omgekeerd is een functie overal "netjes" waar hij zinnig is. Bovenstaande analyse geeft ons een middel in handen om kritiek te hebben op mathematische functies die niet op zinnige (of zullen we zeggen "zinnelijke") wijze zijn geformuleerd. De functie van Lebesque is een voorbeeld van zo'n niet konkreet tastbare, en in deze zin niet alleen plaatselijk, doch geheel en al *onzinnige* functie.

6.6 Theorie van Bopp

In het hoofdstuk OperatorenRekening hebben we ontmoet de volgende bewerker, die tot effect heeft dat een willekeurige functie op zijn domein als het ware wordt "uitgesmeerd", over een gebiedje ter grootte σ :

$$e^{\frac{1}{2}\sigma^2(d/dx)^2}$$

We hadden deze operator een *sensor* kunnen noemen. De *gevoeligheid* van de sensor is omgekeerd evenredig met de spreiding σ in de exponent. Generalisatie van de sensor S naar drie dimensies is rechttoe rechtaan:

$$S = e^{\frac{1}{2}\sigma^2\nabla^2}$$

Hierin is $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$.

Wanneer S werkt op een functie f , dan schrijven we: $\tilde{f} = Sf$, en we herkennen $\tilde{f}$ als de *zin* van f (zodra $\sigma \rightarrow 0$).

Het heeft er de schijn van dat de sensor S een zekere plaats toekomt binnen het raamwerk van de klassieke elektrodynamika. In [19] deel II lezen we over de theorie van Bopp. Nauw verwant hiermee is de eigen theorie, die hieronder wordt gerepresenteerd. Wanneer men met het elektron meebeweegt, dan wordt van alle elektromagnetische grootheden alleen de elektrische komponent waargenomen. Inzoverre is de theorie dus algemeen.

We hebben gezien dat de veld-energie van een elektron, zoals die berekend wordt volgens de klassieke elektrodynamika, uitkomt op een oneindige grootheid. Vraag is nog steeds wat daarvan de oorzaak is. Om die vraag te kunnen beantwoorden zullen we van begin af aan beter moeten kijken naar wat er in de werkelijkheid gebeurt.

De veldsterkte van het elektron wordt geïntegreerd. Deze veldsterkte wordt op haar beurt afgeleid van de wet van Coulomb, een wet die met grote experimentele nauwkeurigheid is vastgesteld. Wat mankeert er dan aan? Wel, die experimentele nauwkeurigheid! Het meten gaat altijd met behulp van een "voelspriet". De gevoeligheid van zo'n meting is wel groot, maar ook weer niet zo groot dat op de plaats van de puntlading zelf ooit een oneindig grote veldsterkte gemeten zou kunnen worden. We hebben duidelijk vastgesteld dat het oneindige fysisch niet bestaat.

Alles goed en wel, maar het is toch niet aannemelijk dat voor de veldsterkte dan maar iets moet worden gesubstitueerd wat *door ons* stervelingen via de een of andere grove meetmethode wordt waargenomen? Dat zou toch een volkomen willekeurige gang van zaken zijn? Inderdaad. Maar er is licht aan het eind van de tunnel. Wordt er in de QuantumElektroDynamika immers niet gesproken over de zelf-energie van het elektron? Dat is de energie die het elektron als het ware van zichzelf opmeet. Alvorens

deze energie met voortvarendheid te berekenen, wat zou men denken van de "zelf-veldsterkte" van het elektron? Dat zou dan de veldsterkte zijn die het elektron, met zijn eigen sensor, met een zeer grote *eigen gevoeligheid*, van $\hbar/m_0c$ om zichzelf heen "waarneemt".

Op grond van het bovenstaande identificeren wij de gevoeligheid σ van de sensor $\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2\nabla^2)$ met de fundamentele quantummechanische ruimtebegrenzing voor deeltjes in rust:

$$\sigma = \frac{\hbar}{m_0c}$$

Merk op dat, naarmate de deeltjes groter worden, de rustmassa evenredig groter wordt, de spreiding σ dus kleiner, en de operator S steeds meer gaat lijken op convolutie met een zeer steile piek:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2} = \delta(t)$$

Voor klassieke deeltjes is dus een met onnauwkeurigheid bewerkte golffunctie of veldsterkte of elke andere grootte gelijk aan zichzelf: $S\Psi = \Psi$, een gevolg van de diafragma-eigenschap voor delta-functies.

De veldsterkte voor een puntlading is $E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. We kunnen nu het een en ander echt uitwerken. Een eerste aanzet luidt als volgt: $\tilde{E}(x, y, z) =$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^3 \iiint \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} e^{-[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2]/2\sigma^2} d\xi d\eta d\zeta$$

Het lijkt interessant om eerst een speciaal geval te onderzoeken, namelijk de waarde van $\tilde{E}$ in de oorsprong: $\tilde{E}(0, 0, 0)$. De ruimte-integraal kan dan worden uitgerekend met behulp van bolschillen:

$$\begin{aligned} \tilde{E}(r=0) &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_0^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-r^2/2\sigma^2} 4\pi r^2 dr = \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{q}{\epsilon_0} \int_0^\infty e^{-r^2/2\sigma^2} dr = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^3 \frac{q}{\epsilon_0} \frac{1}{2} \sigma\sqrt{2\pi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sigma^2} = E(\sigma) \end{aligned}$$

Dit is een fraaie uitkomst. Wanneer men de veldsterkte $E(r)$ corrigeert voor de eindige afmetingen van het elektron, en vervolgens de waarde bepaalt in de oorsprong, dan is het alsof men de "exakte" veldsterkte bepaalt op de rand van het "harde bolletje" met straal σ dat elektron heet.

De functie $\tilde{E}$ is bolsymmetrisch om de oorsprong. Het is dus voldoende de gemeten veldsterkte in één richting, bijvoorbeeld de x-as, te bestuderen.

Om deze as kan men cylinder coördinaten invoeren: $\eta^2 + \zeta^2 = r^2$ en $d\eta d\zeta = 2\pi r dr$. Zonder beperking van de algemeenheid is dan:

$$\tilde{E} = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/2\sigma^2} \left[\int_0^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0(\xi^2 + r^2)} e^{-r^2/2\sigma^2} 2\pi r dr \right] d\xi$$

Het is zinvol om dimensieloze grootheden in te voeren: deel de lengtematen x, ξ, r door de elementaire afstand σ . Dan komt er na vereenvoudiging:

$$\tilde{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sigma^2} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-\xi)^2} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}r^2}}{r^2 + \xi^2} dr^2 \right] d\xi$$

De integraal tussen vierkante haken is, via $t = \frac{1}{2}(r^2 + \xi^2)$, equivalent met:

$$e^{\frac{1}{2}\xi^2} \int_{\frac{1}{2}\xi^2}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = -e^{\frac{1}{2}\xi^2} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}\xi^2} \frac{e^t}{t} dt$$

De laatste integraal is een oude bekende, waarvan we inmiddels dus weten dat zij niet analytisch te berekenen is. Het is namelijk weer de "exponentiële integraal", gedefinieerd als: $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \exp(t)/t dt$.

Omdat een formule voor de eigen-veldsterkte van het elektron blijkbaar niet te verkrijgen is in gesloten vorm, is de enige weg die ons nu nog openstaat een numerieke benadering. We gaan hiertoe uit van de volgende expressie, welke uit het bovenstaande kan worden afgeleid:

$$2\sqrt{2\pi} \tilde{E}(x)/E(\sigma) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_0^\infty (e^{x\xi} + e^{-x\xi}) \left[-Ei\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \right] d\xi$$

Natuurlijk kunnen we in de computer geen getallen $[-\infty, +\infty]$ kwijt. We nemen in plaats daarvan een redelijk groot "betrouwbaarheids" interval, zeg van de orde 6σ (zie Statistiek). Funkties worden binnen één σ benaderd met een stuk of wat stappen, zeg 30. We berekenen in zo'n 40 punten van de x-richting door numerieke integraties de funktiewaarde $\tilde{E}(x)$, en plotten het resultaat op het scherm. Volgt hier de listing van het BASIC programma dat bij dit probleem behoort:

```
10 REM Eigen Veldsterkte van het Elektron
20 REM =====
30 REM Exponentiele integraal -Ei(-x^2/2):
40 RM=6 : KR=30 : DR=1/KR : LR=KR*RM
50 DIM EI(LR) : G=0 : EI(LR)=G : T=-.5*RM^2
60 FOR K=1 TO LR-1 : R=-RM+K*DR : TV=T : T=-.5*R^2
70 DT=T-TV : Y=-SQR(T*TV) : REM Meetkundig gemiddelde
```

```

80 G=G+EXP(Y)/Y*DT : EI(LR-K)=-G : NEXT K
110 REM Raster tekenen:
120 SCREEN(1) : CLS : COLOR 0,1 : SC=39
130 FOR I=1 TO 6 : Y=199-(I-1)*SC
140 LINE(0,Y)-(319,Y),1 : NEXT I
150 FOR I=1 TO 9 : X=(I-1)*SC
160 LINE(X,0)-(X,199),1 : NEXT I
175 PI=4*ATN(1) : VEEL=2*SQR(2*PI)
180 REM Laplace integraal van -Ei(-x^2/2):
185 XM=8 : KX=5 : DX=1/KX : LX=KX*XM
190 XV=0 : GV=VEEL : VV=VEEL
210 FOR I=1 TO LX : X=(I-1)*DX
225 FOR K=1 TO LR : R=K*DR
230 T=(EXP(R*X)+EXP(-R*X))*EI(K)
235 IF K=1 THEN G=.5*T*DR
240 G=G+T*DR : NEXT K : G=EXP(-X^2/2)*G
250 REM Klassieke & numerieke oplossing:
260 IF I<=KX THEN V=VEEL
270 IF I>KX THEN V=VEEL/X^2
280 LINE (SC*XV,199-SC*VV)-(SC*X,199-SC*V),2
290 LINE (SC*XV,199-SC*GV)-(SC*X,199-SC*G),3
300 XV=X : GV=G : VV=V : NEXT I
320 IF INKEY$="" THEN 320 ELSE END

```

De grafiek is een weergave van de veldsterkte van het elektron, zoals die bij benadering zou worden waargenomen met de grootste eigen gevoeligheid die door de natuur kan worden opgebracht. Het resultaat van ons computerprogramma wordt onnauwkeuriger naarmate men zich verder van de oorsprong verwijdt.

Op grond van analytische argumenten (uit de Statistiek) kan men echter inzien dat de veldsterkte keurig de klassieke waarde benadert voor $r \gg \sigma$. Het resultaat van een waarneming met sensor S van een gemeten functie $g(x, y, z)$ is in het algemeen een convolutie-integraal:

$$\tilde{g} = \iiint f(\xi, \eta, \zeta) g(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) d\xi d\eta d\zeta$$

Hierin is f de sensor-functie en g de gemeten functie. Ontwikkel g in een Taylor reeks om $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$:

$$g(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) \approx g(x, y, z) - \xi \frac{\partial g}{\partial x} - \eta \frac{\partial g}{\partial y} - \zeta \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\
& + \xi \eta \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \eta \zeta \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} + \zeta \xi \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}
\end{aligned}$$

In deze uitdrukking hangen de partiële differentiaal quotiënten niet langer af van (ξ, η, ζ) omdat ze berekend zijn voor $(\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$. Zodat de convolutie-integraal ten naaste bij gelijk wordt aan:

$$\begin{aligned}
& g(x, y, z) \iiint f \, d\xi d\eta d\zeta \\
& - \frac{\partial g}{\partial x} \iiint \xi f \, d\xi d\eta d\zeta - \frac{\partial g}{\partial y} \iiint \eta f \, d\xi d\eta d\zeta - \frac{\partial g}{\partial z} \iiint \zeta f \, d\xi d\eta d\zeta + \\
& \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \iiint \xi^2 f \, d\xi d\eta d\zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \iiint \eta^2 f \, d\xi d\eta d\zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \iiint \zeta^2 f \, d\xi d\eta d\zeta + \\
& \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \iiint \xi \eta f \, d\xi d\eta d\zeta + \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial z} \iiint \eta \zeta f \, d\xi d\eta d\zeta + \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial x} \iiint \zeta \xi f \, d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned}$$

De eerste integraal is per definitie gelijk aan 1. De volgende 3 integralen zijn gelijk aan de verwachtingswaarde van de sensor-functie, en daarom gelijk aan 0. De volgende 3 integralen zijn gelijk aan de spreidingen van de sensor-functie in de diverse coördinaat-richtingen. De laatste 3 integralen tenslotte zijn nul. Dus:

$$\tilde{g} \approx g + \frac{1}{2} \sigma_x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma_y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \sigma_z^2 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = g + \frac{1}{2} \sigma^2 \nabla^2 g$$

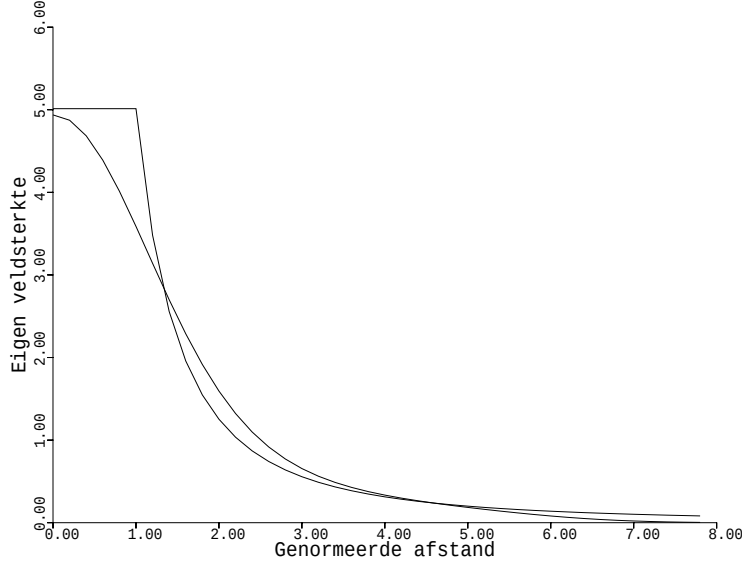
Een asymptotische benadering voor grote afstanden, die ook te vinden is in menig boek over Statistiek [41]. Toegepast op de veldsterkte rondom het elektron:

$$\nabla^2 \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \frac{1}{r^2} = \frac{2}{r^4}$$

En dus:

$$\tilde{E} \approx E \left(1 + \frac{\sigma^2}{r^2} \right) \quad (\text{veraf})$$

De gevonden uitdrukking is een goede benadering voor de veldsterkte op redelijke tot grote afstand van de puntlading. Men ziet hoe de correctie op de klassieke veldsterkte snel afneemt tot nul. We vinden een veldsterkte $\tilde{E}(x, y, z)$ die voor punten "ver" van de oorsprong veel gelijkenis vertoont met de klassieke veldsterkte $E(x, y, z)$.



Houdt men vast aan een waarde $\hbar/m_0c$ voor de onnauwkeurigheid in de positie van het elektron, dan is het elektromagnetische aandeel in de massa van het elektron slechts een fraktie van het totaal: in de orde van grootte van de fijnstructuur-konstante ofwel $1/137$ (: zie appendix "Natuurkonstanten"). Dit resultaat komt niet geheel onverwacht [19].

Het blijkt dat we de bij de operator S behorende exponent ook tegenkomen in het linkerlid van de Schrödinger vergelijking, mits we even de moeite nemen om de laatste dimensieloos te maken. We schrijven iets anders dan gewoonlijk:

$$\left[\frac{E}{m_0c^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar}{m_0c} \right)^2 \nabla^2 \right] \Psi = \frac{V}{m_0c^2} \Psi$$

Blijkbaar is de (operator voor) kinetische energie gedeeld door rustenergie gerelateerd aan het "volume" dat een "elementair deeltje" in de ruimte inneemt. Wanneer de potentiaal V gelijk aan nul is, dan is de term $E/(m_0c^2)$ gelijk aan één. Links van het gelijkteken staan dan de eerste twee termen van de (Taylor)reeksontwikkeling voor S , ook wel bekend als "de infinitesimale transformatie" (: Lie groepen) behorend bij $\exp(\frac{1}{2}\sigma^2\nabla^2)$.

6.7 Poreus continuüm

Een warmtewisselaar is een cilindervormig vat met daarin gemonteerd een aantal pijpen. Het vat zelf is gevuld met een stromend medium dat "primaire" wordt genoemd. De pijpen zijn gevuld met een stromend medium dat "sekundaire" wordt genoemd. Het primaire medium is relatief heet, het sekundaire medium is relatief koud. Het primaire medium stroomt van boven naar onder, het sekundaire medium stroomt van onder naar boven. Door de pijpwand heen wordt warmte overgedragen van het primaire naar het sekundaire medium. Hetgeen de naam van het apparaat verklaart. Een afbeelding van de (tussen)warmtewisselaar die gepland was voor de snelle kweekreactor in Kalkar vindt u *achterin* het boek. Hierin bevond zich vloeibaar natrium, aan primaire zowel als aan sekundaire zijde. Te zien is dat het primaire natrium zijwaarts, via perforaties, de bundel instroomt en uitstroomt. Dit geeft aanleiding tot een minstens tweedimensionale stromingsverdeling (cilindersymmetrisch) aan primaire zijde. De stromingsverdeling heeft aanzienlijke invloed op de temperatuurverdeling over de pijpenbundel, en als gevolg daarvan ook op spanningen in het pijpwandmateriaal. Wanneer de laatste een zekere grens overschrijden dan kan het apparaat de vernieling in gaan.

Teneinde de primaire stroming en de temperatuurverdeling in een warmtewisselaar te beschrijven, hebben onderzoekers het zogenaamde vloeistof-pijpen continuüm model bedacht. Het idee hierachter is ontleend aan de klassieke theorie der *poreuze media*. Hierbij kan worden gedacht aan transportverschijnselen in lagen van zand, klei en leem. Toepassingen hiervan vindt men in de hydraulica van grondwater. Maar wie goed om zich heen kijkt, ziet vele andere transportverschijnselen waarbij poreuze media een rol spelen. Zoals aardappelen, opgeslagen in een silo, die een poreus medium vormen voor luchtkoeling. Andere voorbeelden zijn filtratie en chemische reacties waarbij vaste katalysatoren worden gebruikt. Maar ook stroming in de kern van een nucleaire reaktor, of in de pijpenbundel van een warmtewisselaar, kan met enige verbeeldingskracht beschouwd worden als stroming in een poreus medium. Het heeft voordelen om pijpenbundels op deze manier te modelleren omdat het, vanuit een praktisch oogpunt, ondoenlijk is om de grondvergelijkingen der stromingsleer (Navier-Stokes), en de vergelijkingen die de warmteoverdracht beschrijven, rechtstreeks toe te passen. Denk alleen maar aan de randvoorwaarden voor de snelheden. Die zouden dan nul moeten zijn in ieder punt van een gekompliceerde vaste structuur.

Alvorens verder te gaan is het goed om op te merken dat er niets op tegen is om een pijpenbundel te beschouwen als een *echt* continu medium. Het vloeistof-pijpen continuüm is niet wezenlijk verschillend namelijk van andere continue media, zoals ijzer, water, lucht of de ruimte-tijd zelf. Wij

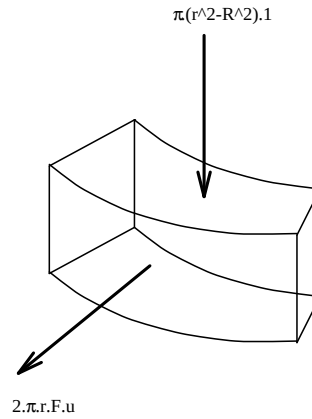
hebben in vorige hoofdstukken gezien dat ook "echte" continue media helemaal onderaan voorzien zijn van een corpusculaire structuur. Fysisch kunnen continue media alleen maar bestaan als benadering, hetgeen zijn weerspiegeling vindt in het feit dat de reële getallen, die met onze waarneming van het continuüm overeenkomen, wezenlijk *onnauwkeurig* zijn. Betrekken wij dit op het vloeistof-pijpen continuüm, dan moet concreet rekening gehouden worden met een onnauwkeurigheid in de orde van de afstand tussen (de assen van) twee naburige pijpen, de zogenaamde "steek" van de pijpenbundel.

In [42] wordt er van uitgegaan dat het primaire stromingsveld in eerste benadering incompressibel, en ook rotatievrij is. Het laatste kan intuïtief worden begrepen als volgt. De afmetingen van een vloeistofdeeltje in het model zijn, min of meer per definitie, groter dan de steek. De afstand tussen twee nabuurpijpen komt immers overeen met de infinitesimale afstand in dit continuüm. Het is redelijk te veronderstellen dat een vloeistofdeeltje van deze grootte een wrijving zal ondervinden die aan beide zijden vrijwel hetzelfde is, en dus niet zal roteren. Als gevolg hiervan zijn de (partiële differentiaal)vergelijkingen voor stroming in een pijpenbundel in eerste benadering hetzelfde als voor een *ideale* stroming (in cylindercoördinaten wel te verstaan):

$$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial rv}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Hierin is: u = horizontale snelheidskomponent, v = verticale snelheidscomponent, r = straal, z = verticale afstand.

Nog grover, maar in wezen niet erg afwijkend van het ideale stromingsmodel, is de werkwijze die werd gevolgd door de afdeling TA/K bij Neratoom. Dit was een Technische Afdeling die bestond uit Konstrukteurs, mensen aan het tekenbord, zonder academische opleiding. Zij hadden het volgende beeld van de stroming bij het in- en uittree-gedeelte van de pijpenbundel (de figuur is voor tweërlei uitleg vatbaar, waarvan er maar één de juiste is):



Beschouw een ringvormig vloeistofelement in het uitstroomgebied. De binnenstraal van dit element is gelijk aan de (buiten)straal R van de centrale pijp. De buitenstraal van de ring heet r en is variabel. De hoogte van de ring is gelijk aan de hoogte van de uitstroomperforatie F . Zowel de achterkant van de ring (centrale pijp), als de onderkant (pijpplaat) zijn afgesloten. Zodoende moet de flux door de bovenkant steeds gelijk zijn aan de flux door de voorkant. Gemakshalve wordt aangenomen dat het medium de ring binnenstroomt met de midden-bundel snelheid. Daarvoor wordt een konstante waarde 1 aangenomen. De snelheidskomponent u kan nu eenvoudig worden berekend uit:

$$\pi \cdot (r^2 - R^2) \cdot 1 = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot F \cdot u \quad \implies \quad u = \frac{r^2 - R^2}{2 \cdot F \cdot r} = \frac{1}{2 \cdot F} \left(r - \frac{R^2}{r} \right)$$

Ter plaatse van de uitstroom-perforatie geldt het totale massabehoud van de stroming die uit de midden-bundel komt en de stroming die door de perforatie naar buiten treedt.

We zullen nu laten zien dat dit primitieve stromingsbeeld niettemin overeenkomt met de benadering van TA/SWO [42], de Technische Afdeling voor Stroming en WarmteOverdracht, waar ik zelf werkzaam was. We zagen dat de stroming in eerste benadering onsamendrukbaar en rotatievrij mag worden verondersteld. Neem voor de component v aan dat ze lineair toeneemt in axiale richting z , dat is de eenvoudigst mogelijke aanname. De andere component u kennen we al:

$$v = -\frac{z}{F} \quad ; \quad u = \frac{r^2 - R^2}{2 \cdot F \cdot r}$$

De lezer controleert gemakkelijk dat deze oplossing *inderdaad* voldoet aan de partiële differentiaalvergelijkingen die de ideale stroming beschrijven. Toch is er een maartje aan dit verhaal. Aan de bovenkant van de perforatie F namelijk gaat het lineaire verloop van verticale component v met een knik over in $v = -1$ en wordt de horizontale component u plotseling 0. Dit is fysisch uiteraard onmogelijk. Op grond van de juiste randvoorwaarden zal de academische oplossing van het stelsel een ander beeld te zien geven. En zeker ter plaatse van de overgang naar midden-bundel zal het verschil met de tekenzaal aanpak goed te zien zijn. Maar als eerste klap? Zeker een daalder waard!

Sla een controle volume om een aantal pijpen heen en zet de energiebalans op voor dit volume. Laat vervolgens het volume "infinitesimaal klein" worden, hoewel het altijd groter moet blijven dan de steek. Of gooi de integraaltekens weg, na het theorema van Gauss te hebben toegepast. Of pas een willekeurige andere verwaarlozingstechniek toe. Dan wordt hiermee "afgeleid" het volgende stelsel partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, geldig voor de temperaturen:

$$c.G_P \left[u. \frac{\partial T_P}{\partial r} + v. \frac{\partial T_P}{\partial z} \right] + a.(T_P - T_S) = 0 \quad : \text{ primair}$$

$$c.G_S. \frac{\partial T_S}{\partial z} + a.(T_S - T_P) = 0 \quad : \text{ sekundair}$$

Hierin is: c = warmtecapaciteit; G = massastroom; T = temperatuur; (r, z) = cylindercoördinaten; (u, v) = genormeerde snelheden; a = totale warmteoverdracht coëfficiënt; P = primair; S = sekundair.

De randvoorwaarden mogen niet worden vergeten:

$$T_P = T_{PL} \quad \text{bij de primaire inlaat (intreeperforatie boven)}$$

$$T_S = T_{S0} \quad \text{bij de sekundaire inlaat (pijpplaat onder)}$$

Het stelsel vergelijkingen dient als analytisch raamwerk waarop een eindige Volume methode gebaseerd kan worden. Alsof je eerst meel maakt van aardappelen en daarna weer aardappelen van het meel [43]. Aan de andere kant is het zinvol om een aantal zaken helemaal *analytisch* te benaderen.

Er is nog een ander argument waarom een ideale inwendige stroming letterlijk *ideaal* is voor het uitrekenen van de temperatuurverdeling in een warmtewisselaar. Het volgende is een toepassing van de ongelijkheid van Schwarz voor het inproduct van twee vectoren:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b})$$

Kwadrater het totale overgedragen vermogen, en werk uit:

$$\begin{aligned} \left[\iiint a/(c.G_P) \cdot (T_P - T_S) dV \right]^2 &= \left[\iiint \left\{ u \cdot \frac{\partial T_P}{\partial r} + v \cdot \frac{\partial T_P}{\partial z} \right\} dV \right]^2 \\ &\leq \left[\iiint \{u^2 + v^2\} dV \right] \cdot \left[\iiint \left\{ \left(\frac{\partial T_P}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_P}{\partial z} \right)^2 \right\} dV \right] \end{aligned}$$

Zodat:

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial T_P}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_P}{\partial z} \right)^2 \right\} dV \geq \frac{(\text{totaal overgedragen vermogen})^2}{(c.G_P)^2 \iiint \{u^2 + v^2\} dV}$$

Uit de theoretische stromingsleer is bekend dat van alle onsamendrukbare stromingen waarbij de normale snelheidskomponent op de wanden hetzelfde is, de potentiaalstroming of ideale stroming de kleinste kinetische energie bezit. Dit betekent dat de noemer aan de rechterkant voor een ideale stroming minimaal is, de term als geheel dus maximaal, even aangenomen dat het totale overgedragen vermogen niet verandert. Aan de linkerkant staat de integrale (kwadraat)grootte van de temperatuurgradiënten. Die worden onder deze omstandigheden kennelijk maximaal berekend. Sommen die gemaakt worden met een ideale inwendige stroming als basis zijn stellig *aan de veilige kant*, omdat zij aanleiding geven tot overdreven temperatuurspanningen bij gegeven operationele kondities.

De natuurwetten van de warmtewisselaar kan een zekere schoonheid niet worden ontczegd. Maar eens te meer is duidelijk waar deze elegantie in wezen vandaan komt. Ze is louter en alleen het gevolg van een buitengewoon *versimpelde* voorstelling van zaken, inherent aan het vloeistof-pijpen continuüm model. Tot vervelens toe:

Natuurwetten zien er alleen maar simpel en elegant uit doordat er grove vereenvoudigingen zijn toegepast.

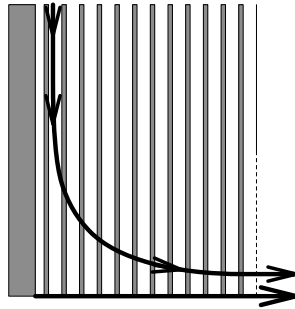
De warmteoverdracht coëfficiënten a in bovenstaand stelsel vergelijkingen worden samengesteld uit een warmtedoorgangscoefficiënt voor de pijpwand (die verreweg het belangrijkste is), in combinatie met warmtedoorgangscoefficiënten natriumzijdig, aan de primaire en aan de sekundaire kant. Voor de natriumzijdige coëfficiënten kan men in de literatuur verschillende zogenaamde "correlaties" vinden. Welnu, over smaak valt niet te twisten, maar ik ben nog nooit van mijn leven zulke afschuwelijke formules tegengekomen: zie de appendix "Maresca en Dwyer".

Hoe "dichter" bij de werkelijkheid, des te lelijker de wiskunde lijkt het wel, in plaats van de tegenovergestelde gemeenplaats dat "fundamentele" formules per definitie ook "mooi" zouden zijn.

Alsof op een zeker punt het "genoeg" van de vereiste nauwkeurigheid is bereikt, waardoor het nut van nog langer mathematisch elegant te zijn wegvalt.

De warmteoverdracht vergelijkingen kunnen "exakt" worden geïntegreerd in het minder interessante deel van de pijpenbundel, waar de stroming parallel aan de pijpen loopt, en dus niet langer tweedimensionaal is. Voor dat gebied kan het zogenaamde éénpijpsmodel worden afgeleid, een stelsel gewone differentiaalvergelijkingen dat op de standaard manier kan worden opgelost. Het gaat hier om een bekend stuk theorie, waar wij weinig leerzams aan kunnen toevoegen: voor geïnteresseerden is er de de appendix "Eenpijpsmodel".

Behalve voor het parallelstroom gedeelte kunnen analytische oplossingen worden gevonden op enkele andere plaatsen in de warmtewisselaar. Het gemakkelijkst is zo'n oplossing te konstrueren voor de stroomlijn die loopt vanaf de verbinding van de centrale pijp met de onderste pijpplaat naar de uitstroomperforatie:



De vergelijkingen reduceren daar tot één gewone differentiaalvergelijking voor primaire temperaturen, omdat de sekundaire temperatuur randvoorwaarde is. Bovendien hebben we een uitdrukking voor de stromingsverdeling ter plaatse, volgens het TA/K model. Substitutie daarvan maakt duidelijk dat:

$$c.G_P \cdot \frac{1}{2.F} \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \frac{dT_P}{dr} + a \cdot [T_P - T_{S0}] = 0$$

De oplossing van zo'n gewone differentiaalvergelijking wordt routinematig gevonden met OperatorenRekening:

$$\left[\frac{d}{dr} + \frac{2.r.F.a/(c.G_P)}{r^2 - R^2} \right] (T_P - T_{S0}) = 0$$

We moeten integreren de term:

$$\int \frac{2.r.F.a/(c.G_P)}{r^2 - R^2} dr = \frac{F.a}{c.G_P} \int \frac{dr^2}{r^2 - R^2} = \frac{F.a}{c.G_P} \log \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right)$$

Waarmee de differentiaalvergelijking wordt omgewerkt tot:

$$\left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right)^{-F.a/(c.G_P)} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right)^{+F.a/(c.G_P)} (T_P - T_{S0}) = 0$$

Waarvan de oplossing is:

$$T_P - T_{S0} = K. \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right)^{-H} \quad \text{waarin} \quad H = F.a/(c.G_P)$$

Verder is K een (tamelijk) onbekende konstante. Omdat $(r^2/R^2 - 1)$ in de hoek nul kan worden, en de grootheid $-H$ een *negatieve* macht is, is de oplossing dus *singulier*. Maar natuurlijk niet! Oneindigheden van deze aard kunnen in een warmtewisselaar helemaal niet bestaan. We weten op fysische gronden absoluut zeker dat alle temperaturen zich bevinden tussen de grenzen T_{S0} , de sekundaire intree-temperatuur, en T_{PL} , de primaire intree-temperatuur. We moeten nu wel konkluderen dat de konstante K niet anders kan zijn dan gelijk aan nul. Als gevolg hiervan geldt langs de onderste stroomlijn in het apparaat: $T_P = T_{S0}$; de primaire temperatuur is daar gelijk aan de sekundaire inlaat-temperatuur.

Nu lijkt toch sprake van overhaaste konklusies. U wordt eraan herinnerd dat het vloeistof-pijpen continuüm een *ruw* model is. Daarom is het verantwoord telkens vraagtekens te zetten bij de geldigheid van het model. In het bijzonder is oplettendheid geboden wanneer er *singulariteiten* in het model optreden. Plaatsen waar singulariteiten optreden zijn zonder meer verdacht. Oneindigheden zijn immers fysisch onbestaanbaar. Maar in plaats van al te snel te konkluderen tot een nul-oplossing, kan een singulariteit er ook simpelweg op duiden dat op zekere plaatsen *de continuüm aanname niet langer opgaat*. Nu zagen we dat in het continuüm model de oplossing een benadering is voor infinitesimale volumina ter grootte van de steek. Als we de oplossing middelen over een ring ter breedte van de steek, dan moet zij ongeveer hetzelfde blijven. Dit is overeenkomstig de Wazige Optiek van continuïteit. Konkretiseren we deze gedachte voor de hierboven gevonden analytische oplossing (waarbij gemakshalve wordt afgezien van het zeer speciale geval dat niet $H \neq 1$):

$$K. \frac{\int_x^{x+s} \left[(r/R)^2 - 1 \right]^{-H} 2.\pi.r.dr}{\pi.[(x+s)^2 - x^2]} =$$

$$\frac{K}{1-H} \cdot \frac{\left[\left(\frac{x+s}{R}\right)^2 - 1\right]^{1-H} - \left[\left(\frac{x}{R}\right)^2 - 1\right]^{1-H}}{\left(\frac{x+s}{R}\right)^2 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}$$

Hierin is s = de steek van de pijpenbundel; $H = F.a/(c.G_P)$. Er onstaat meteen een heel ander beeld. De singulariteit wordt *verzwakt* door haar uit te smeren over de steek. Er kunnen twee gevallen worden onderscheiden:

1. $H > 1$. Nog steeds een echte singulariteit. De konklusies over de nul-oplossing blijven geldig: $T_P = T_{S0}$.
2. $H < 1$. De singulariteit bestaat in dit geval niet langer. Konklusies over de nul-oplossing zijn mogelijk niet juist. De primaire temperatuur gaat niet overal tegen de sekundaire temperatuur aanliggen: $T_P \neq T_{S0}$. De voorwaarde $H < 1$ houdt in dat $F.a/c.G_P < 1$ ofwel $c.G_P > F.a$. Hetgeen fysisch betekent dat de primaire massastroom zo groot is dat de warmte ervan *niet* binnen de afstand van een pijpsteek kan worden overgedragen. Maar dit betekent weer dat een van de basisvoorwaarden van het continuum model niet langer opgaat. De "differentiaal" s tussen de pijpen wordt als het ware voelbaar, en daarmee de *fijnstructuur* van de bundel. Het primaire medium is plaatselijk niet "echt" continu meer.

We zouden de waarde G_P waarvoor $c.G_P = F.a$ in zekere zin een *kritische* massastroom kunnen noemen. Het is een aardige exercitie om deze kritische massastroom eens uit te rekenen voor een echte warmtewisselaar. De volgende waarden zijn afkomstig uit [42], en hebben bij een konkreet apparaat gehoord. Ik vat zulke rekenkundige zaken graag samen in een BASIC programmaatje, dat tevens de kritische massastroom laat weten:

```

10 PI=4*ATN(1) : REM Trancendent getal
20 NP=846 : REM aaNtal Pijpen
30 DU=0.0210 : REM Diameter pijpen bUiten
40 DI=0.0182 : REM Diameter pijpen bInnen
50 L=20 : REM geLeidingsvermogen pijpwand
60 REM globale wArmteoverdracht-constante:
70 A=NP*2*PI*L/LOG(DU/DI)
80 F=0.370 : REM hoogte uitstroomperForatie
90 C=1275 : REM warmteCapaciteit natrium
100 REM kritische Primaire massastroom:
110 GP=F*A/C : PRINT GP

```

De uitkomst is: $G_P = 215.6 kg/s$. In de proefopstelling van Neratoom en TNO bij Hengelo, het (inmiddels gesloten) 50 MegaWatt circuit, zijn experimenten uitgevoerd waarbij de primaire massastroom varieerde tussen de 80 en 360 kg/s . Het is meer dan waarschijnlijk dat de waarde van de kritische massastroom hier tussenin ligt. Men moet er dus van uitgaan dat

het gaat om een reëel effect: de ontaarding van het pijpenbundel-continuüm moet experimenteel waarneembaar zijn geweest. Numerieke proefnemingen met het continuüm-model hebben dit vermoeden bevestigd. Maar een grofstoffelijke warmtewisselaar geniet nu eenmaal niet dezelfde status als een versneller bij CERN. En dus wordt fundamenteel, zuiver wetenschappelijk onderzoek wel *daar* ingepland, maar niet hier.

6.8 Samenvatting

0. De werkelijkheid zelf is niet exakt / niet ideaal, maar in zekere zin slordig. Overal zit speling in. De natuur bezit een intrinsieke "vrijheid" die nimmer in een strikte beschrijving te vangen zal zijn.

1. Deze vrijheid, de intrinsieke speling van de natuur, het vermogen van de werkelijkheid om niet star te zijn maar een beetje losjes in elkaar te steken. Deze manier van *swingen* maakt het wezen van het continuüm uit.

2. Fysisch geldig is de stelling van Brouwer: Iedere reële funktie die op een interval van reële getallen éénduidig ofwel duidelijk is (dus een "echte" funktie), is tevens op dat hele interval continu.

3. OperatorenRekening is vrijwel hetzelfde als het rekenen met getallen, onder voorwaarde dat men de commutatieve wet nadrukkelijk hiervan uitzondert.

4. De belangrijkste formule van de gewone OperatorenRekening is:

$$\frac{d}{dx} + f = e^{-\int f dx} \frac{d}{dx} e^{+\int f dx}$$

5. Met behulp van OperatorenRekening kunnen gewone (lineaire) differentiaalvergelijkingen zeer systematisch worden opgelost.

6. Met behulp van OperatorenRekening kan men begrijpen wat de ontstaansgrond is van de LaplaceTransformatie.

7. De operator

$$e^{\sigma^2 \frac{d^2}{dx^2}}$$

doet met een funktie f hetzelfde als een convolutie van f met de normale (Gauss) verdeling.

8. Het is redelijk te veronderstellen dat het aftasten van een funktie met een ideale voelspriet niets anders naar voren brengt dan de funktie zelf. Er zullen in de materiële werkelijkheid geen funkties zitten "achter" funkties die al op de perfekte manier gemeten zijn, geen realiteit achter een reeds toereikend geïdealiseerde realiteit, geen verdere verborgen parameters, niet nog meer wiskunde achter de wiskunde. In het algemeen behoort dus de ideale meting van een funktie gelijk te zijn aan de funktie zelf.

9. De functie van Lebesgue is een voorbeeld van een nimmer concreet tastbare, en in deze betekenis geheel en al onzinnige functie.

10. Een Eigen Onnauwkeurigheid in de plaats heft de singulariteit op in de veldsterkte (en de energie) van het elektron, en kan zonder tegenspraken aan de klassieke electrodynamica worden toegevoegd. Dit is in wezen de theorie van Bopp [19].

11. Het concept van de poreuze media is toepasselijk in de warme werktuigbouw. Ook een grofstoffelijke structuur als de pijpenbundel van een warmtewisselaar kan succesvol als een (echt) continuüm worden behandeld.

12. Een simpele ("propstroom") benadering van het snelheidsveld in de vloeistof kan uitermate effectief zijn. Wij hebben zo'n benadering gebruikt bij het aanmaken van analytische uitdrukkingen voor de lokale temperatuurverdeling onderin een warmtewisselaar.

13. Van alle stromingen in een warmtewisselaar is de ideale inwendige stroming (potentiaalstroming) het meest "konservatief". Dit wil zeggen dat temperatuur-spanningen aan de veilige kant (te hoog) berekend worden.

14. Hoe "dichter" bij de werkelijkheid, des te lelijker de wiskunde, in plaats van de tegenovergestelde gemeenplaats dat "fundamentele" formules per definitie ook mooi zouden zijn. Voorbij een zeker punt heeft het voor formules geen zin meer om elegant te wezen, omdat wat de technologie betreft het "genoeg" van de nauwkeurigheid is bereikt.

15. In de Neratoom warmtewisselaar is sprake van een kritische primaire massastroom waarboven de diskrete structuur van de pijpenbundel merkbaar wordt: doordat primaire en sekundaire temperatuur onder in het apparaat ongelijk worden. De grootte van deze massastroom is $G_P \approx 215 \text{ kg/s}$.

6.9 Aantekeningen

0. Beschouw functies met de eigenschap: $f(a+b) = f(a) + f(b)$. Beweerd wordt dat de *enige* reële functies met deze eigenschap de volgende vorm hebben: $f(x) = c.x$. Hierin is c een willekeurige konstante. Bewijs:
 $f(a) = f([a-b] + b) = f(a-b) + f(b) \implies f(a-b) = f(a) - f(b)$
 $f(a-a) = f(a) - f(a) \implies f(0) = 0$
 $f(n.a) = f(a + a + \dots a) = f(a) + f(a) + \dots f(a) \implies f(n.a) = n.f(a)$
 $f(1) = f(n/n) = n.f(1/n) \implies f(1/n) = 1/n.f(1)$
 $f(m/n) = m.f(1/n) = m/n.f(1) \implies f(m/n) = m/n.f(1)$
 $f(-m/n) = f(0) - m/n.f(1) \implies f(-m/n) = -m/n.f(1)$
Omdat dit dus geldt voor alle rationale getallen, positief als negatief, dus bij benadering ook voor alle intervallen van rationale getallen, geldt de stelling automatisch voor alle reële getallen.

1. Beschouw functies met de eigenschap: $f(a.b) = f(a) + f(b)$.

De enige functies met deze eigenschap zijn van de vorm: $f(x) = c \cdot \log(x)$.

Hierin is c een willekeurige konstante en $x > 0$.

Bewijs: stel $f(x) = g(\log(x))$

dan is $f(a \cdot b) = g(\log(a \cdot b)) = g(\log(a) + \log(b))$, maar tegelijkertijd geldt:

$f(a) + f(b) = g(\log(a)) + g(\log(b))$. Dus op grond van de vorige stelling:

$g(x) = c \cdot x \implies f(x) = c \cdot \log(x)$.

3. Op analoge wijze bewijst men de volgende stelling.

Beschouw functies met de volgende eigenschap: $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$.

De enige functies met deze eigenschap zijn van de vorm: $f(x) = c^x$.

Hierin is c een willekeurige positieve konstante.

4. Op analoge wijze bewijst men de volgende stelling.

Beschouw functies met de volgende eigenschap: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

De enige functies met deze eigenschap zijn van de vorm: $f(x) = x^c$.

Hierin is c een willekeurige konstante en $x > 0$.

Hoofdstuk 7

NUMERIEKE PERIKELEN

Men moet het oordeel van fysici toelaten in de mathematische besluitvorming. Op deze manier heb ik bij herhaling gepleit voor een multi-disciplinaire visie op de wiskunde. Het ontbreekt onze geleerden niet aan vernuft, maar des te meer aan een fundamentele eensgezindheid. We hebben inmiddels gezien hoe kwetsbaar, op dit punt, het samenstel van de exakte wetenschappen is.

Van alle wiskundige disciplines is de Numerieke Wiskunde mijn ultieme test. Hier kan namelijk, dank zij de eigen deskundigheid, met trefzekerheid worden bewezen dat puur de menselijke zelfzucht [0], en niet enig gebrek aan vernuft, debet is aan falend wiskundig inzicht. Dit is des te alarmerender omdat het gaat om een relatief eenvoudige problematiek.

7.1 Saamhorigheid

Menig verschijnsel in natuur en techniek wordt beschreven door een stelsel (partiële) differentiaalvergelijkingen met begin- en/of randvoorwaarden. In sterk vereenvoudigde situaties kunnen deze vergelijkingen soms analytisch worden opgelost. Meestal is dit echter niet het geval, of loont het vanwege de ingewikkeldheid de moeite niet. Men zal in meer realistische gevallen dan ook genoegen nemen met een *Numerieke oplossing* van het probleem.

Het ontwikkelen van goede numerieke benaderingen, diskretisaties namelijk van differentiaalvergelijkingen, is het belangrijkste onderdeel van de huidige Numerieke Wiskunde, ook wel Numerieke Analyse genoemd. Door de ontwikkeling van steeds krachtiger digitale computers kan een steeds groter

beslag worden gelegd op rekentijd en geheugen, waardoor meer realistische simulaties tot de mogelijkheden zijn gaan behoren. Tegenwoordig is het de gewoonste zaak van de wereld om mechanische konstrukties volledig driedimensionaal door te rekenen, op een computer, met behulp van numerieke methoden. Bij een schaalvergroting als deze vallen de mogelijkheden der klassieke analyse volledig in het niet.

Wij spraken hierboven over *de* Numerieke Analyse, alsof er sprake zou zijn van één coherent vakgebied. De werkelijkheid gebiedt daarentegen het bestaan aan te nemen van tenminste *twee* vakgebieden die Numerieke Analyse heten. Het ene vakgebied beroept zich op de "eindige Differentie methode", het andere vakgebied beroept zich op de "eindige Elementen methode". Eindige Differenties en eindige Elementen zijn zodanig verschillende Numerieke Wiskundes dat het tot in de negentiger jaren heeft geduurd alvorens serieuze beoefenaars van *beide methoden tegelijk* in de literatuur worden aangetroffen [44]. Ga naar een willekeurige bijeenkomst over numerieke methoden, en de kans is nog steeds aanwezig dat de zaal kan worden opgesplitst in in twee disjuncte delen. Op een zodanige wijze dat de ene helft van de vakbroeders de andere helft van de vakbroeders niet kan en misschien zelfs *niet wil* begrijpen.

Vanuit beide disciplines wordt de Grote Tweedracht trouwens stelselmatig ontkend, of men maakt er zich vanaf met een bagatel. Zonder blikken of blozen beweert de ene partij dat eindige Differenties slechts een speciaal geval zijn van de eindige Elementen methode [45]. De andere partij verklaart stellig dat de eindige Differentie methode slechts succes kon boeken door niet te luisteren naar "de lokroep vanuit het eindige elementen kamp" [46]. De tegenstelling is echter te grondig om te kunnen worden verwaarloosd.

Stelsels gekoppelde partiële differentiaalvergelijkingen van aanzienlijke complexiteit, zoals die welke de stroming en warmteoverdracht in vloeistoffen beschrijven, kunnen toegankelijk worden gemaakt voor numerieke behandeling door middel van eindige Differentie methoden. Meer in het bijzonder eindige Volumen methoden, zoals die welke beschreven worden in [43], zijn op dit gebied buitengewoon succesvol. Van Spalding afkomstig is de gevleugelde uitspraak: "Als de natuur zijn vergelijkingen kan oplossen, dan kunnen wij dat ook". Zoek veeleisende toepassingen! De robuustheid van een eindige Volumen diskretisatie, waarbij wordt uitgegaan van slechts "Vijf GrondRegels", kent qua eenvoud zijn weerga niet, en doorstaat hiermee glansrijk een vergelijk met eindige Elementen methoden. De voornaamste nadelen van eindige Differentie-achtige schema's zijn echter evenzeer bekend. Wanneer men probeert af te rekenen met inhomogene delen van het rekendomein, die bijvoorbeeld worden veroorzaakt door een kromlijnige begrenzing, dan ontstaan er meestal behoorlijk wat complicaties.

Wanneer men uitgaat van eindige Elementen methoden, dan vormen gekromde randen en een ingewikkelde samenhang daarentegen geen enkel probleem. Inhomogeniteiten en onregelmatigheden worden afgehandeld op een uniforme en natuurlijke wijze die zijn weerga niet kent, en waarbij de eindige Differentie methode duidelijk het onderspit delft. Dit verklaart althans gedeeltelijk waarom eindige Elementen zo'n enorme opgang hebben gemaakt in de mechanica der vaste structuren, waar een nauwkeurige beschrijving van geometrie en topologie belangrijk is [45]. De voornaamste nadelen van de eindige Elementen methode zijn echter evenzeer bekend. Teneinde een eindige Elementen diskretisatie schema op de geëigende wijze te kunnen formuleren, moet men teruggrijpen op iets wat afgeleid wordt van een zogenaamd variatieprincipe, zoals het beginsel dat de potentiële energie van een mechanische konstruktie minimaal is. Wanneer men te maken heeft met bijvoorbeeld transportverschijnselen in een stroming, dan blijkt een dergelijk principe als regel een blok aan het been te zijn.

Waargenomen wordt dat de zwakke punten van de eindige Differentie methode zeer precies worden afgedekt door de sterke punten van de eindige Elementen methode, en dat omgekeerd de zwakke punten van de eindige Elementen methode zeer precies worden afgedekt door de sterke punten van de eindige Differentie methode. Beide methoden blijken elkaar op werkelijk alle fronten bijzonder goed aan te vullen. Eindige Differenties en eindige Elementen lijken wel voor elkander geschapen. De gescheiden ontwikkeling van twee numerieke disciplines kan ongetwijfeld uit de loop der geschiedenis worden begrepen. Echter dat deze situatie, afgezien van een enkele gunstige uitzondering [44], voortduurt tot op de dag van vandaag, een dergelijk anachronisme kan noch vanuit theoretisch, noch vanuit praktisch oogpunt worden gerechtvaardigd. Geformuleerd wordt daarom het *Beginsel van Saamhorigheid*:

Er zou EEN vak Numerieke Analyse moeten komen in plaats van de twee nu. Het vakgebied zou zo moeten zijn dat eindige Differenties en eindige Elementen niet anders zijn dan slechts twee verschillende manieren om naar dezelfde zaken te kijken. Met andere woorden: eindige Differenties en eindige Elementen zijn twee duale aspecten van één en slechts één universele Numerieke Analyse.

Ik wil nog voor het einde van dit boekdeel een aannemelijk mathematisch bewijs hebben geleverd dat saamhorigheid en gemeenschapszin, binnen dit ene vakgebied, probleem-oplossend werken.

Het ontbreken van een uniforme Numerieke Analyse schept nog een ander groot obstakel. Het lijkt nu namelijk alsof de klassieke analyse een doortimmerd wiskundig geheel is, terwijl de numerieke analyse weliswaar iets te maken heeft met kleine stukjes, differenties of elementen genoemd, maar het is vrij willekeurig wat je er van in gebruik neemt. Dit is zeer nadelig

omdat wij juist willen verdedigen de stelling dat er een duidelijke materialisatie mogelijk is van de klassieke analyse, richting numerieke wiskunde, een materialisatie die *niet* resulteert in een ratjetoe aan diskretisaties. Daarvoor moet helaas worden vooruitgelopen op de gewenste volledige Unificatie van het vak. Wel, niet helemaal. Op Internet heb ik laten verschijnen de "Series on Unified Numerical Approximations" [FTP].

7.2 Duale samenhang

Welnee, het flexibele Data Model is helemaal niet uniek voor de "Visualization Data Explorer" van IBM. Wanneer desbetreffende theorie deel zou uitmaken van het reguliere wiskunde onderwijs, dan zouden om te beginnen belachelijke claims van dit soort snel de wereld uitgeholpen worden. Voorzover de aanmatiging van IBM serieus genomen moet worden, gaat het om een veel ernstiger zaak. Voorkomen zou moeten worden dat bedrijven gedwongen zijn om iedere keer opnieuw het wiel uit te vinden. Maar misschien heb ik het wel helemaal bij het verkeerde eind, en is de Theorie van de Samenhang (Engels: "connectivity") een conventioneel onderdeel van de wiskunde, "diskrete topologie" genaamd. Dan hebben we te maken met een heel ander probleem: waarom dringen sommige stukken doodgewone wiskunde blijkbaar dan toch niet door in de toepassingsgebieden waar ze broodnodig zijn?

Neem als eerste voorbeeld een willekeurige landkaart. Concentreer alle aandacht op de zogenaamde drielandenpunten. Voor West Europa kan van de drielandenpunten een lijst worden gemaakt. Hier volgt een klein stukje van deze lijst:

Spanje	Portugal	zee	: 1
Spanje	Portugal	zee	: 2
Frankrijk	Spanje	zee	: 3
Frankrijk	Spanje	zee	: 4
Frankrijk	Belgie	zee	: 5
Frankrijk	Belgie	Luxemburg	: 6
Frankrijk	Duitsland	Luxemburg	: 7
Nederland	Belgie	Duitsland	: 8
Luxemburg	Belgie	Duitsland	: 9
Nederland	Duitsland	zee	: 10

Merk op dat ook het omringende water, de zee, als een "land" wordt opgevat. Verbind nu opeenvolgende nummers aan deze drielandenpunten, zoals we hierboven hebben laten zien. Dan kunnen we ze voor elk van de landen bij elkaar zetten:

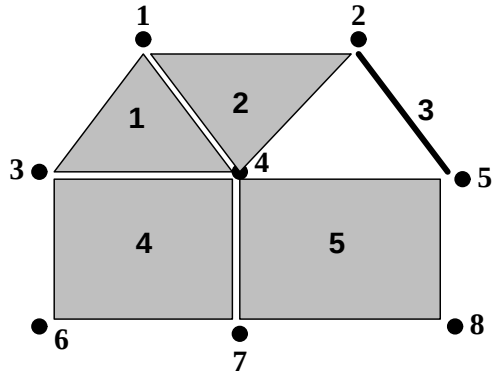
1 = Duitsland	:	7	8	9	10
2 = zee	:	1	2	3	4 5 10
3 = Frankrijk	:	3	4	5	6 7
4 = België	:	5	6	8	9
5 = Spanje	:	1	2	3	4
6 = Luxemburg	:	6	7	9	
7 = Nederland	:	8	10		
8 = Portugal	:	1	2		

We kunnen nog verder abstraheren, en (ook) de namen van de landen vervangen door opeenvolgende nummers: Duitsland = 1, zee = 2, Dit geeft een opeenvolging van nummers, in plaats van namen, bij elk drielandenpunt:

5	8	2
5	8	2
3	5	2
3	5	2
3	4	2
3	4	6
3	1	6
7	4	1
6	4	1
7	1	2

Bovenstaande is een voorbeeld van wat in de ingenieurswetenschappen "topologie" of "samenhang" wordt genoemd [45]. Bijvoorbeeld een stuk van een landkaart kan door middel van een dergelijke samenhang worden gekarakteriseerd. Er zijn bovendien *twee* manieren om dit te doen: verzamel bij elk drielandenpunt de drie omringende landen, of: verzamel bij elk land alle drielandenpunten die op de grens van dat land liggen. De ene samenhang wordt wel de *duale* of *inverse* of *omgekeerde* samenhang van de andere genoemd.

Het tweede voorbeeld is afkomstig uit de Strukturele Mechanika. Het volgende is onderdeel van een figuur, die is afgekeken uit [45]:



Wat we hier zien is een samenstel van zogenaamde *elementen*. De (eindige) elementen (Engels: Finite Elements) zitten aan elkaar vast met hun zogenaamde *knooppunten*. Zowel de elementen als de knooppunten zijn *genummerd*. We kunnen twee lijsten maken. De eerste lijst associeert ieder element met de knooppunten die eraan vastzitten:

element	knooppunten
1	1 3 4
2	1 2 4
3	2 5
4	3 4 6 7
5	4 5 7 8

De tweede lijst verbindt ieder knooppunt met de elementen die eraan vastzitten, dat is de duale samenhang:

knooppunt	elementen
1	1 2
2	2 3
3	1 4
4	1 2 4 5
5	3 5
6	4
7	4 5
8	5

Gegeven de eerste lijst, kunnen we altijd de tweede lijst maken, en omgekeerd. Hieronder is opgenomen een Basic programma dat juist deze taak vervult. De naam van het ding is INVERSE.BAS, om redenen die snel

duidelijk zullen worden. Een invoer voor dit programma is het bestand TOPOL.DAT, dat in ons geval als volgt is gedefinieerd:

```
1 3 4 0
1 2 4 0
2 5 0
3 4 6 7 0
4 5 7 8 0
```

De nullen ("0") zijn "sentinel" waarden, dat wil zeggen eind-van-de-regel (EOL) aanduidingen voor het programma. Dit omdat bepaalde eigenschappen van Basic de duisternis tot standaard verheffen. Hier komt het eerste programma-gedeelte:

```
10 PRINT "Invoer file: ": INPUT I$
20 OPEN I$+".DAT" FOR INPUT AS #1
30 OPEN "EFFE.DAT" FOR OUTPUT AS #2
40 NEL=1
50 INPUT #1,NO : IF EOF(1)<0 THEN 80
60 IF NO=0 THEN NEL=NEL+1 : GOTO 50
70 PRINT #2,NO,NEL : GOTO 50
80 CLOSE #1 : CLOSE #2
```

De klad-file EFFE bevat de volgende data, hieronder georganiseerd in twee rijen in plaats van twee kolommen (teneinde witruimte te sparen):

```
elementen: 1 1 1 2 2 2 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5
knooppunten: 1 2 3 1 2 4 2 5 3 4 6 7 4 5 7 8
```

Volgt het tweede gedeelte van het programma, niets anders dan een 'system call' naar de standaard SORT procedure in DOS (niet omdat zulks efficiënt is, maar ik wil niet opnieuw het wiel uitvinden):

```
90 REM
100 SHELL "SORT < EFFE.DAT > EVEN.DAT"
110 SHELL "DEL EFFE.DAT"
120 REM
```

Dit resulteert in een klad-file EVEN, die de volgende gegevens bevat, geordend wederom in rijen:

```
knooppunten: 1 1 2 2 3 3 4 4 4 4 5 5 6 7 7 8
elementen: 1 2 2 3 1 4 1 2 4 5 3 5 4 4 5 5
```

Tenslotte worden de data in EVEN gekonverteerd naar hun uiteindelijke formaat: de file DUAL. Dit wordt gerealiseerd door het volgende programma-fragment:

```

130 OPEN "EVEN.DAT" FOR INPUT AS #1
140 PRINT "Uitvoer file: ": INPUT O$
150 OPEN O$+".DAT" FOR OUTPUT AS #2
160 NOW=1
170 INPUT #1,NO,NEL
180 IF NOW<>NO THEN PRINT #2,"0" : NOW=NO
190 PRINT #2,NEL; : IF EOF(1)=0 THEN 170
200 PRINT #2,"0" : CLOSE #1 : CLOSE #2
210 SHELL "DEL EVEN.DAT" : END

```

De inhoud van de file DUAL.DAT wordt hieronder gegeven. De nullen ("0") dienen weer als eind-van-de-regel markering.

```

1  2  0
2  3  0
1  4  0
1  2  4  5  0
3  5  0
4  0
4  5  0
5  0

```

De procedure als geheel suggereert een aantal dingen:

1. Misschien kan wel *ieder* paar rijen van natuurlijke getallen (Engels: integer arrays) worden opgevat als de definitie van een diskrete topologie.
2. Het bepalen van de duale samenhang is een SORTeer probleem, met de andere rij als sleutel.
3. De etiketten "knooppunt" en "element" zijn, gezien vanuit wiskundig oogpunt, onderling volkomen verwisselbaar.

De TOPOL file komt overeen met "welke knooppunten bij een element behoren", terwijl de "DUAL" file overeenkomt met "welke elementen bij een knooppunt behoren". Wanneer we het programma draaien met DUAL in plaats van TOPOL als invoer file, dan zal TOPOL resulteren als uitvoer file. We kunnen dit gedrag symbolisch samenvatten als:

$$\text{INVERSE}(\text{TOPOL}) = \text{DUAL} \quad ; \quad \text{INVERSE}(\text{DUAL}) = \text{TOPOL}$$

Dus, het INVERSE programma is in feite *de daad van het omgekeerde bepalen* op zich zelf: $\text{INVERSE}() \equiv ()^{-1}$. We kunnen daarom ook schrijven:

$$\begin{aligned}
(\text{TOPOL})^{-1} &= \text{DUAL} \quad ; \quad (\text{DUAL})^{-1} = \text{TOPOL} \\
((\text{samenhang})^{-1})^{-1} &= \text{samenhang}
\end{aligned}$$

7.3 Tegen de stroom in

Laten we dit hoofdstuk beginnen met zo duidelijk mogelijk te verwoorden wat ons standpunt is ten aanzien van de verhouding tussen de Klassieke en de Toegepaste of Numerieke Analyse.

De opvatting dat numerieke oplossingen een min of meer gebrekkige benadering zijn van "exakte" oplossingen, die de klassieke analyse ons zou leveren, is om verschillende redenen onjuist.

Om te beginnen levert de klassieke analyse ons deze oplossingen meestal niet. Ho, wacht eens even, de oplossing "bestaat" theoretisch wel, want dat kunnen we "bewijzen". We kunnen haar alleen niet uitrekenen! De *naakte existentie* van oplossingen, volgens de niet-konstruktieve wiskunde van de Formalistische school, weten we het nog? Als Toegepast Wiskundige heeft men weinig of geen houvast aan zulke niet-konstruktieve opvattingen.

Daarom is het ook niet zinvol te verlangen dat de numerieke oplossing naar de analytische oplossing convergeert. Wél korrekt daarentegen is de opvatting dat analytische oplossing en numerieke oplossing, indien beide bestaan, naar dezelfde waarden moeten convergeren.

Het is bovendien niet redelijk te veronderstellen dat numerieke oplossingen gemakkelijker de fout in gaan dan analytische. Ook in de afleiding van een ingewikkelde analytische oplossing kunnen "bugs" zitten.

Teneinde de gangbare opvatting versus die van ons te illustreren, volgt hier een fragment uit [47]. (Partiële) Differentiaalquotiënten kunnen op vele manieren worden benaderd door eindige differenties. Door al dit soort van benaderingen worden fouten geïntroduceerd, *afbreekfouten* genaamd. De aanwezigheid ervan zal worden aangeduid door middel van de asymptotische O notatie. Ames behandelt vervolgens een aantal schema's in twee dimensies. Het is alleszins voldoende ons te beperken tot de één-dimensionale weergave van dit betoog. Beschouw een uniform raster in 1-D.



De afstand tussen twee naburige punten in het rekenraster bedraagt h . Laat een willekeurige functie f gediskretiseerd worden als waarden f_i op de punten van het raster. Ontwikkel f in een Taylor-reeks:

$$f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x)$$

Hieruit volgt:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(x)}{2} h$$

Specificeer x voor de rasterpunten:

$$f'_i \approx \frac{1}{h}[f_{i+1} - f_i] + O(h)$$

De grootheid $O(h)$ vertegenwoordigt de asymptotische notatie voor de "afbreekfout" van de benadering. Blijkbaar is de fout hier "van de eerste orde". Beschouw naast de reeksontwikkeling van hierboven ook de volgende:

$$f(x-h) \approx f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x)$$

En trek de twee van elkaar af. Dan komt er:

$$f(x+h) - f(x-h) \approx 2 \cdot h \cdot f'(x) + 2 \frac{h^3}{3!} f'''(x)$$

Hieruit volgt:

$$f'_i \approx \frac{1}{2h}[f_{i+1} - f_{i-1}] + O(h^2)$$

In tegenstelling tot de eerste benadering is deze "van de tweede orde". Men is in mathematische kring geneigd aan te nemen dat zo'n tweede orde differentie schema de voorkeur verdient boven een dat "slechts van de eerste orde" is.

We zullen nu laten zien tot welk een absurd resultaat deze opvatting aanleiding geeft. Beschouw de volgende uiterst eenvoudige differentiaalvergelijking:

$$\frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{met randvoorwaarde: } T(0) = 1$$

Diskretiseer met behulp van het "tweede orde nauwkeurige" schema:

$$T_1 = 1 ; (T_3 - T_1)/2h = 0 ; (T_4 - T_2)/2h = 0 ; (T_5 - T_3)/2h = 0 ; \dots$$

Hieruit volgt:

$$\dots = T_5 = T_3 = T_1 = 1 ; \dots = T_6 = T_4 = T_2 = \text{volkomen willekeurig}$$

Een korrekte oplossing wordt alleen gevonden voor de *oneven* rasterpunten. Door het "tweede orde" schema worden de waarden op de even en de oneven punten namelijk volledig van elkaar ontkoppeld. Wie nu mocht denken dat professionals in het vakgebied zulke voor de hand liggende fouten niet zullen begaan, moet ik bij deze teleurstellen. Bij het diskretiseren van de stromingsvergelijkingen (Navier Stokes) met behulp van de methode van Galerkin is men destijds gestuit op het verschijnsel van de "schaakbord druk" (chequerboard pressure). Een (tamelijk eenvoudige) analyse brengt

aan het licht dat het hier gaat om in wezen *hetzelfde* fenomeen als hierboven: twee geheel ontkoppelde om-en-om "oplossingen". Men werd (en wordt?) van een beter begrip van het verschijnsel weerhouden door de ogenschijnlijk veel grotere ingewikkeldheid van het Navier-Stokes probleem.

We hebben het inmiddels over vergelijkingen voor konvektieve stromingen. Een voorbeeld wat iedereen kent is het transport door stromend water van warmte in een centrale verwarming. Keren we even terug naar onze zeer eenvoudige gewone differentiaalvergelijking $dT/dx = 0$ of wat uitgebreider: $u.dT/dx = 0$ met $u > 0$. Dit is niets anders dan de dan de allersimpelste analytische beschrijving die men kan bedenken voor het probleem van konvektie in het ééndimensionale geval.

Eigenlijk heeft alleen de eindige Differentie methode qua numerieke traditie de middelen in huis om konvektieve verschijnselen afdoende te behandelen. De diskretisatie schema's die met konvektie samenhangen worden "tegenstroom" (engels: "upwind") schema's genoemd. Het volgende is een vrije vertaling uit Patankar [43]. De controle volumes [eigen aan de eindige "volumen" methode] kunnen worden opgevat als roerbakken die achter elkaar zijn geschakeld door middel van korte buizen. De stroming door deze buizen geeft de konvektie weer. [...] Omdat de bakken worden geroerd, bevat iedere bak vloeistof met een gelijkmatige temperatuur. Dan is het toepasselijk te veronderstellen dat de vloeistof in elke verbindingsbuis de temperatuur heeft die heerst in de bak welke stroomopwaarts gelegen is. Normaal gesproken kan de vloeistof in de buis niets weten over de bak waar hij naar toe stroomt, maar neemt wel alles met zich mee van de bak waar hij vandaan komt. Dit is de essentie van het tegenstroom schema. Einde Patankar's betoog. Zelf heb ik dit roerbakken model ooit opnieuw uitgevonden, en gebruikt bij het berekenen van asymmetrische temperaturen in het bovengedeelte van een natriumpomp (Neratoom). Verder blijkt het idee mathematisch overeen te komen met het differentie-schema dat we hierboven het eerst van al hebben afgeleid, dat is het schema van de *eerste orde*:

$$f'_i \approx \frac{1}{h}[f_{i+1} - f_i] + O(h)$$

Resultierend in:

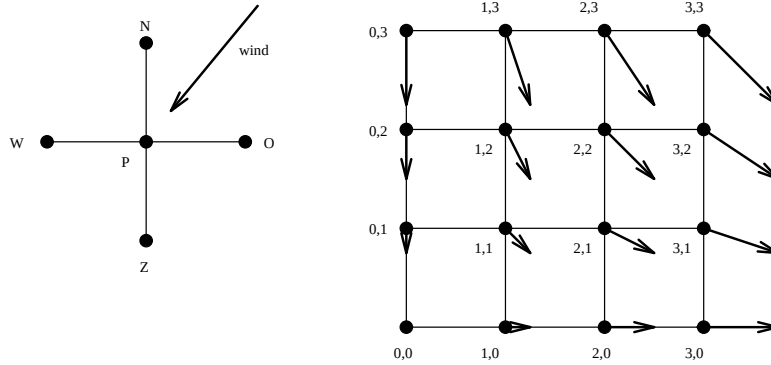
$$T_1 = 1 ; (T_2 - T_1)/h = 0 ; (T_3 - T_2)/h = 0 ; (T_4 - T_3)/h = 0 ; \dots$$

Hieruit volgt:

$$\dots = T_5 = T_4 = T_3 = T_2 = T_1 = 1$$

En dit is *exakt* de korrekte oplossing, op alle even en oneven punten. Het schema van de eerste orde is dus, zeker voor dit specifieke geval, oneindig veel beter dan het, volgens menig wiskundige nauwkeuriger, schema van de

tweede orde.



Kern van de eindige Differentie methode voor konvektie is het "upwind" schema, het nemen van differenties tegen de wind in. Om dit beter te begrijpen, bekijken we een stuk van een 2-D homogeen (rechthoekig, equidistant) eindige differentie raster. De mogelijke windrichtingen Noord, Zuid, Oost en West zijn dienovereenkomstig aangeduid. Dit is geen grap: de professionele aanpak van het probleem gaat op dezelfde manier. A propos, de Professionele waarnemer in ons verhaal wordt geacht plaats te nemen ter plekke P . Stel nu dat we te maken hebben met noordoosten wind, ofwel konvektie in het kwadrant PON . Men gaat ervan uit dat zo'n windrichting altijd kan worden ontbonden: in een oostelijke component U en een noordelijke component V . Stel dat in het oosten een temperatuur T_O en in het noorden een temperatuur T_N heerst. Bepalend voor de temperatuur T_P ter plaatse P van de waarnemer zijn dan, behalve de temperatuur T_P ter plaatse, uitsluitend de omgevingstemperaturen T_O en T_N . Natuurlijk doen alleen eindige differenties tegen-de-wind-in ter zake: $(T_O - T_P)$ en $(T_N - T_P)$. Warme wind uit bijvoorbeeld het Zuiden komt in ons geval niet aangewaaid, en dus kan een invloed van de bijbehorende temperatuur niet worden gevoeld. Enkel de koude luchtmassa's uit Noord en Oost komen samen ter plekke P , en oefenen hun invloed uit, volgens de eenvoudige natuurwet van het verschijnsel dat we *mengen* noemen:

$$U.(T_O - T_P) + V.(T_N - T_P) = 0$$

Hierin is: U = horizontale component van het debiet, V = verticale component van het debiet (: vergelijk "Vierkante bellen"). Dit is het klassieke tweedimensionale tegenwind eindige differentie schema voor zuivere konvektie. Men kan uit de literatuur opmaken dat het aanvankelijk ook een behoorlijk "tegendraads" schema was. Tot op de dag van vandaag zijn er

heel wat mensen die er niet aan willen geloven.

Het tegenwind schema is slechts "van de orde $O(h)$ ", en zou bijvoorbeeld niet nauwkeurig genoeg zijn. Laten we deze veronderstelling maar meteen pareren met een tegenvoorbeeld. Beschouw zuivere konvektie van warmte in een vlakke ideale stroming die de binnenkant van een rechte hoek neemt. De snelheidsverdeling in deze stroming is bekend op grond van een analytische oplossing. Wanneer men het stromingsveld voorziet van een uniform 4 bij 4 raster met een index i voor de x -richting en een index j voor de y -richting, dan worden de snelheden (u, v) op een konstante na gegeven door:

$$u = i \quad ; \quad v = -j$$

Bijbehorende debieten zijn positief: $U = u$ en $V = -v$. Uitwerking van het tegenstroom schema voor de temperaturen resulteert nu in:

$$(i + j).T_{i,j} = i.T_{i-1,j} + j.T_{i,j+1}$$

Neem op de instroomrand, die bovenaan zit, een lineair temperatuurprofiel aan, voor het gemak met de waarden 0, 1, 2, 3. Omdat de wand een stroomlijn is, zijn daar alle temperaturen gelijk aan de waarde 0. Nu kunnen de temperaturen in de rest van het veld handmatig worden berekend, om te beginnen voor (1, 2):

$$(1 + 2).T_{1,2} = 1.0 + 2.1 = 2 \quad \implies \quad T(1, 2) = 2/3$$

Na afloop van 6 van deze eenvoudige berekeningen ziet het temperatuurveld er als volgt uit:

0	1	2	3
0	2/3	4/3	2
0	1/3	2/3	1
0	0	0	0

Het opvallende is dat het temperatuurprofiel op de uitstroomrand er precies zo uit ziet als men op grond van de analytische oplossing mag verwachten. Op grond van een iets ingewikkelder beschouwing is in te zien dat de numerieke oplossing op een eindige differentie grid van $N \times N$ gegeven wordt door: $T(i, j) = i.j/N$. Dit komt overeen met een analytische oplossing van de vorm $T(x, y) = x.y$. Laten we voor de volledigheid de partiële differentiaalvergelijking vermelden waar het tegenstroom schema de diskretisatie, lees *materialisatie* van is:

$$u.\frac{\partial T}{\partial x} + v.\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

Substitueer hierin $T(x, y) = x.y$ en $u = x$, $v = -y$, dan blijkt dit inderdaad een uitdrukking identiek nul op te leveren. De konklusie is dat in dit bijzondere geval, door toepassing van het tegenstroom schema, de konvektievergelijking in het hele veld zelfs "exakt" wordt opgelost! En het is al de tweede keer dat ons dit overkomt.

Kort en goed, het moet nu maar eens uit zijn met dat $ge-O(h)$ over de "eerste orde nauwkeurigheid" van upwind schema's.

Laten we de partiële differentiaalvergelijking vermelden waar het 2-D upwind schema de *materialisatie* van is. Of laten we vermelden welke differentiaalvergelijking van het tegenstroom schema de *idealisatie* is. Beide beweringen zijn elkaars complement. We hadden ook kunnen zeggen: laat ons zien wat de *analytische benadering* van het tegenstroom schema is. We willen hiermee af van het Idee dat de analytische benadering de werkelijkheid *per definitie* beter zou beschrijven dan het numerieke schema. Waarbij moet worden aangetekend dat het numerieke schema dan wel enigszins abstrakt moet worden opgevat: zo moet onder andere worden afgezien van de konkrete verdeling van rasterpunten in het vlak. De bedoelde abstraktie moet worden mogelijk gemaakt door een uniforme numerieke wiskunde [FTP]. Maar er is geen enkele reden om gelaten op de toekomst te gaan zitten wachten. Men kan namelijk nu reeds met zekerheid stellen dat *alle* schema's, willen ze serieus in aanmerking komen als kandidaat voor een praktische numerieke beschrijving van de konvektieve termen, op een of andere manier een "upwind" karakter moeten hebben. En het is nu reeds ondenkbaar dat in een veralgemeniseerde numerieke beschrijving deze eigenschap niet onverkort gehandhaafd zal blijven.

Het is bekend dat het tegenstroom schema convergeert naar de overeenkomstige partiële differentiaalvergelijking. Over de mate waarin dat gebeurt lopen de meningen uiteen. Maar wanneer we uitgaan van een maaswijdte in de orde van de gemiddelde vrije weglengte tussen twee moleculen, dan zal de tegenstroom "benadering" fysisch niet te onderscheiden zijn van "exakt". Het omgekeerde is echter beslist *niet* waar. Wanneer we in plaats van het analytische model het tegenstroom schema opvatten als de echte natuurwet, dan is de partiële differentiaalvergelijking toch altijd iets verschillend van het overeenkomstige numerieke schema. Was in de numerieke benadering namelijk de *richting* van de stroming te herkennen - logisch, want dat is precies wat met "upwind" wordt beoogd - in de analytische benadering is deze richtingsgevoeligheid plotseling en *spoorloos verdwenen*. Wij hebben nochtans de tegenstroom voorwaarde op grond van deugdelijke argumenten, mathematisch en fysisch, naar voren gebracht. De gevolgtrekking ligt voor de hand dat in de analytische formulering dan op de een of andere manier wezenlijke informatie wordt verdonkeremaand.

Het numerieke tegenstroom schema bevat richtingsinformatie welke voor

konvektie essentieel is. Na idealisatie tot een partiële differentiaalvergelijking is deze informatie echter spoorloos verdwenen.

Men zou de konklusie kunnen trekken dat de analytische benadering op het punt van de richtingsgevoeligheid zelfs *inferieur* is aan de numerieke benadering. Jazeker, daar mag men aan denken.

Wij naderen de climax van dit hoofdstuk. Beschouw namelijk de volgende variant op de natuurwet voor konvektie:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Er is geen enkele reden om deze differentiaalvergelijking, waar nu de tijd in voorkomt, op een andere manier te diskretiseren dan de konvektie vergelijking voor het platte vlak. Het ligt bovendien voor de hand om, precies zoals dat het geval is in de relativiteitstheorie, ruimte en tijd te behandelen op voet van gelijkheid. In de meest succesvolle variant van de eindige Differentie methode volgens [43] is dit trouwens ook de praktijk. In het geval van een uniform raster, en een positieve snelheid u , wordt het volgende tegenstroom schema afgeleid:

$$\frac{1}{\Delta t}(T_P - T_Z) + \frac{u}{\Delta x}(T_P - T_W) = 0$$

En nu komt het: het is ogenblikkelijk in te zien dat dit schema, behalve voor de omkering van de snelheid, ook niet invariant is voor omkering van de tijd! Aangenomen dat Tegenstroom Differenties echte natuurwetten representeren, moet worden vastgesteld dat met name ook de richting waarin tijd "stroomt" niet zomaar kan worden omgekeerd. Met grote overtuiging durven wij zelfs stellen:

TIJD is ONOMKEERBAAR. De omkeerbaarheid van de tijd is een illusie die louter en alleen te danken is aan verlies aan informatie over de richting, binnen de klassieke analytische formulering van de natuurwetten.

In het numerieke werk is de ervaring dat iedere poging de tijdrichting om te keren onmiddellijk wordt bestraft door het optreden van *instabiliteiten*.

Maar ook in toepassingen van de klassieke analyse blijkt dat deze verloren informatie vaak weer als een extra gegeven, achteraf, moet worden aangebracht. Ik kan mij uit een college ElektroTechniek bijvoorbeeld een "causaliteitsprincipe" herinneren van deze strekking. En wat denkt men van zaken als het zomaar weglaten van oplossingen van de golfvergelijking die naar de verstoring toelopen, in plaats van ervandaan? Alleen maar omdat zo iets fysisch toch echt onbestaanbaar is! Het geheim ligt in de onttroning van de klassieke analyse als enig mogelijk kader. Door te erkennen dat numerieke (tegenstroom) schema's, met even veel recht als analytische

benaderingen, aanspraak kunnen maken op het voeren van de titel "natuур-wet", kan men het probleem van de onomkeerbaarheid van de tijd oplossen. Werd het niet de hoogste tijd?

7.4 Verenigde diffusie

De Numerieke Analyse is de Assepoester van de Wiskunde, goed om iedere keer het zware werk op te knappen. De heel aparte schoonheid van de Numerieke Analyse wordt niet alleen niet ingezien, maar vooral ook niet gewild. Stiefmoederlijk behandeld, tot op de dag van vandaag, dient zij zich te voegen naar de Banach- en Sobolev-ruimten van de funktionaal-analyse. Haar tegenstroom schema's worden van onnauwkeurigheid verdacht, en haar beste elementen treft het verwijt dat ze niet "conform" zijn. Door belachelijke bovengrenzen voor de nauwkeurigheid van numerieke oplossingen te suggereren houdt men de vermeende superioriteit van de klassieke analyse in stand. Zo Banach- en Sobolev-ruimten al iets van uitstaans hebben met de Numerieke Wiskunde, leven zij op veel te grote voet. Het elegante glazen muiltje zal deze stiefzusters vast niet passen.

Wat het fysische verschijnsel "diffusie" betreft zijn de controverses heel wat minder uitgesproken dan bij konvektie. Maar het is goed ons standpunt nog eens te herhalen:

De vraag is niet of het numerieke schema de Laplace-vergelijking oplost. De vraag is of het numerieke schema het fysische verschijnsel diffusie afdoende beschrijft, en of er een onderling verband is tussen de verschillende benaderingen om dit te doen, inclusief de analytische.

Hiermee wil ik nogmaals benadrukken dat de klassieke en de numerieke analyse *gelijkwaardige* wiskundige benaderingen zijn, en dat het belangrijk is er van uit te gaan dat de numerieke benadering evenzeer vrij is van willekeur als de klassieke analyse. We zullen behandelen een zogenaamde Unificatie Stelling, van toepassing op een eindige Volumen (differentie) methode aan de ene kant, en een eindige Elementen methode aan de andere kant. Beide numerieke methoden gaan uit van de volgende partiële differentiaal-vergelijking (PDV), indien we ons (in dit boek) beperken tot het twee-dimensionale geval:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

Hierin zijn (x, y) = globale coördinaten. Een mogelijke interpretatie van de vektor (Q_x, Q_y) is een warmtestroom. De differentiaal-vergelijking drukt dan behoud van warmte uit. In het geval van diffusie, beter bekend als warmtegeleiding, hangen de warmtestromen samen met de temperatuur

volgens:

$$Q_x = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad Q_y = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}$$

Zodat de uiteindelijke differentiaal-vergelijking voor de temperatuur niet van de eerste maar van de tweede orde is. Teneinde nu de PDV geschikt te maken voor numerieke benadering, wordt er een integratie-procedure ingezet. Reeds op dit punt is er een splitsing in twee wegen.

Bij de eindige elementen benadering wordt de differentiaal-vergelijking eerst vermenigvuldigd met een willekeurige (test)funktie en vervolgens geïntegreerd over het rekendomein. Noem de testfunktie f , dan:

$$\iint f \cdot \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right] dx dy = 0$$

Het is in te zien dat deze integraal-formulering volkomen gelijkwaardig is met de oorspronkelijke differentiaal-vergelijking. Dit zit 'm in het gegeven dat de testfunktie f *willekeurig* is.

Partieel integreren, of toepassen van de stelling van Green, dat is hetzelfde, resulteert in een uitdrukking waar lijn-integralen (over randen) in voorkomen, aangevuld met de volgende hoofdterm:

$$- \iint \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot Q_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Q_y \right] dx dy$$

Let op het minteken. Het hiermee behaalde voordeel is een orde-reductie van het probleem. Immers de integrand bevat nu nog uitsluitend partiële afgeleiden van de eerste orde. Vervolgens wordt het rekendomein opgesplitst in elementen, en daarmee ook de integraal, in bijdragen over de afzonderlijke elementen E :

$$- \sum_E \iint \left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot Q_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Q_y \right] dx dy$$

Het simpelste eindige element in twee dimensies is de driehoek: zie de appendix "DriehoeksAlgebra". Essentieel is de Differentiatie Matrix [48], waarmee partiële afgeleiden op een driehoek kunnen worden gediskretiseerd:

$$\Delta \begin{bmatrix} \partial f / \partial x \\ \partial f / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(y_2 - y_3) & +(y_3 - y_1) & +(y_1 - y_2) \\ -(x_2 - x_3) & -(x_3 - x_1) & -(x_1 - x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

In te zien is dat $\partial f / \partial x$ en $\partial f / \partial y$ konstant zijn, dat wil zeggen niet meer in waarde variëren over het element. Aangezien bij diffusie ook Q_x en

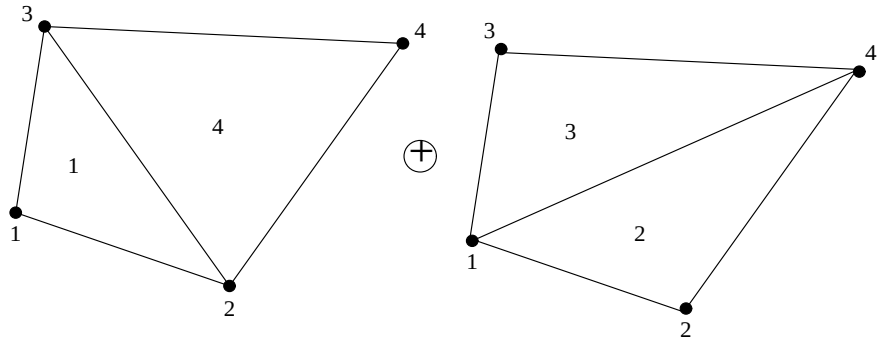
Q_y partiële afgeleiden zijn, zijn ook deze konstant. Hiermee is de eindige elementen formulering voor één driehoek gelijk aan:

$$-\left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot Q_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Q_y\right] \iint dxdy = -\left[\frac{\partial f}{\partial x} \cdot Q_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot Q_y\right] \Delta/2$$

De resterende integraal is namelijk gelijk aan de oppervlakte van de driehoek. De differentiatie matrix toepassend, vinden we:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_3 - y_2)Q_x - (x_3 - x_2)Q_y \\ (y_1 - y_3)Q_x - (x_1 - x_3)Q_y \\ (y_2 - y_1)Q_x - (x_2 - x_1)Q_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We willen echter het eindige elementen domein niet in driehoeken opdelen maar in vierhoeken. Nu kan een vierhoek op zijn beurt toch weer worden opgedeeld in driehoeken, en wel op twee manieren:



We willen bovendien een configuratie waarbij alle hoekpunten een gelijkwaardige rol spelen. We zullen daarom alle 4 de driehoeken meenemen in onze formulering. Het komt erop neer dat we in het resultaat hierboven de volgende permutatie van knooppunts-nummers toepassen:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & 2 & 4 & 1 & & 3 & 1 & 4 & & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Tegelijkertijd geven we een aanduiding op welke driehoek gediskretiseerd wordt, als boven-index (let op: geen macht!) bij de (Q_x, Q_y) waarden. Alle vier de bijdragen over de driehoeken worden gesommeerd (en nogmaals

gehalveerd):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_3 - y_2)Q_x^1 - (x_3 - x_2)Q_y^1 \\ (y_1 - y_3)Q_x^1 - (x_1 - x_3)Q_y^1 \\ (y_2 - y_1)Q_x^1 - (x_2 - x_1)Q_y^1 \end{bmatrix} + \\
& \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_2 & f_4 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_1 - y_4)Q_x^2 - (x_1 - x_4)Q_y^2 \\ (y_2 - y_1)Q_x^2 - (x_2 - x_1)Q_y^2 \\ (y_4 - y_2)Q_x^2 - (x_4 - x_2)Q_y^2 \end{bmatrix} + \\
& \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_3 & f_1 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_4 - y_1)Q_x^3 - (x_4 - x_1)Q_y^3 \\ (y_3 - y_4)Q_x^3 - (x_3 - x_4)Q_y^3 \\ (y_1 - y_3)Q_x^3 - (x_1 - x_3)Q_y^3 \end{bmatrix} + \\
& \frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_4 & f_3 & f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3)Q_x^4 - (x_2 - x_3)Q_y^4 \\ (y_4 - y_2)Q_x^4 - (x_4 - x_2)Q_y^4 \\ (y_3 - y_4)Q_x^4 - (x_3 - x_4)Q_y^4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Hier zit meer achter. Een andere manier om een formulering te bekomen waarbij op alle vier de deel-driehoeken van een vierhoek wordt gediskretiseerd is de zogenaamde numerieke integratie [45]. Hiertoe worden binnen de vierhoek vier punten gekozen, de zogenaamde Gauss punten. Deze liggen normaal gesproken op $(\xi, \eta) = 1/(2\sqrt{3})$. (Verwezen wordt naar de appendix "VierkantsAlgebra" voor uitleg over ξ en η .) Het opent mogelijkheden indien men deze exakte ligging met een korrel zout neemt. De integratiepunten kunnen dan bijvoorbeeld gelokaliseerd worden ter plaatse van de hoekpunten. In dit geval blijkt de vierhoek zich te gedragen als het samenstel van de gedeeltelijk over elkaar liggende driehoeken, zoals geschetst in bovenstaande figuur. Tevens is nu duidelijk waar de gewichtsfactor $1/4$ vandaan komt, en dat de grootheden Q^k niet alleen geassocieerd zijn met de driehoeken, maar evenzeer met de hoekpunten van de oorspronkelijke vierhoek.

Papier is geduldig, maar teneinde het schrijfwerk wat te bekorten bedenken we de volgende afkorting, een soort uitproduct:

$$r_{ij} \times Q_k = (y_i - y_j)Q_x^k - (x_i - x_j)Q_y^k$$

De termen behorend bij $f_k, k = 1...4$ worden bij elkaar gezocht. Men ziet de standaard eindige elementen assemblage procedure gedemonstreerd in het klein. Immers, wat is een eindige elementen matrix anders dan een onvolledig stelsel vergelijkingen? Men vindt:

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{32} \times Q_1 + r_{42} \times Q_2 + r_{34} \times Q_3 + 0 \\ r_{13} \times Q_1 + r_{14} \times Q_2 + 0 + r_{34} \times Q_4 \\ r_{21} \times Q_1 + 0 + r_{41} \times Q_3 + r_{42} \times Q_4 \\ 0 + r_{21} \times Q_2 + r_{13} \times Q_3 + r_{23} \times Q_4 \end{bmatrix}$$

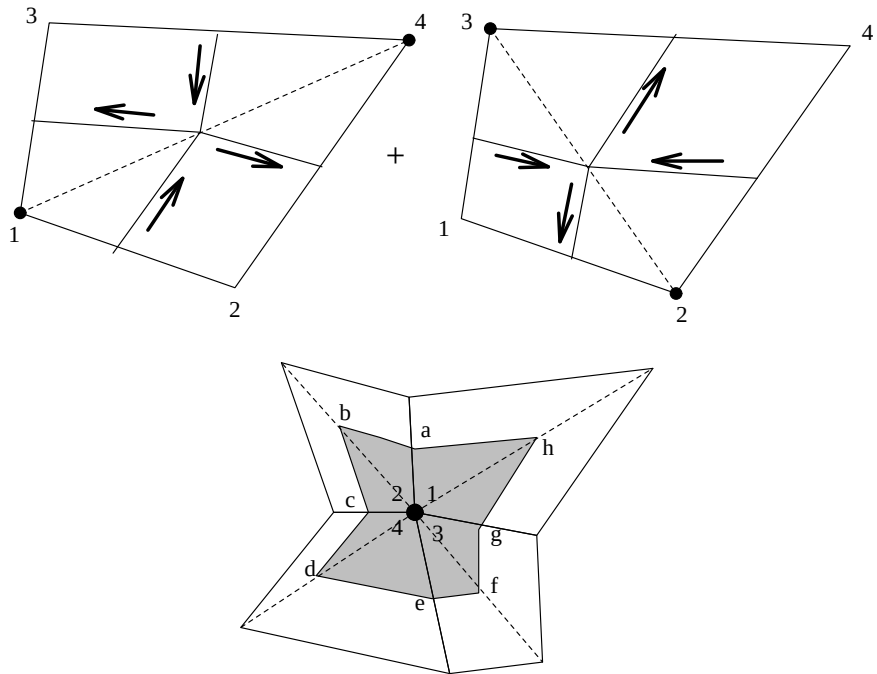
Gebruik achtereenvolgens:

$$r_{23} = r_{34} + r_{42} \quad r_{14} = r_{13} + r_{34} \quad r_{41} = r_{42} + r_{21} \quad r_{23} = r_{21} + r_{13}$$

Om het bovenstaande in een handzamer vorm te gieten:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r_{42} \times \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) + \frac{1}{2}r_{34} \times \frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) \\ \frac{1}{2}r_{13} \times \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) + \frac{1}{2}r_{34} \times \frac{1}{2}(Q_2 + Q_4) \\ \frac{1}{2}r_{21} \times \frac{1}{2}(Q_1 + Q_3) + \frac{1}{2}r_{42} \times \frac{1}{2}(Q_3 + Q_4) \\ \frac{1}{2}r_{21} \times \frac{1}{2}(Q_2 + Q_4) + \frac{1}{2}r_{13} \times \frac{1}{2}(Q_3 + Q_4) \end{bmatrix}$$

Het is een gemeenplaats, maar toch. Een beeld zegt meer dan duizend woorden:



We zien dat de vier stukken van vergelijkingen overeenkomen met vier stukken van kring-integralen, elk om één van de hoekpunten heen. Middens van zijden worden verbonden door de lijnstukken waarover geïntegreerd wordt. Plaatselijk is ook de warmtestroom een gemiddelde van knooppuntswaarden. Verplaatsen we nu het gezichtspunt: concentreer de aandacht niet langer op het element maar op een hoekpunt. In plaats van hoekpunten te rangschikken om een element heen, rangschikt men elementen om een

hoekpunt heen. Voegen we vervolgens alle lijnstukken aaneen voor dat hoekpunt, dan blijkt de kring netjes gesloten te zijn. Middens van zijden worden voorzien van etiketten a, b, c, d, e, f, g, h . Dan is het resultaat, uitgedrukt in ons symbolisme:

$$r_{ba} \times Q_a + r_{cb} \times Q_c + r_{dc} \times Q_c + r_{ed} \times Q_e + r_{fe} \times Q_e + r_{gf} \times Q_g + r_{hg} \times Q_g + r_{ah} \times Q_a$$

Dit levert precies één vergelijking uit de eindige elementen systeem-matrix of grote matrix. Het resultaat is dus nul (aangenomen dat ter plekke geen bron- of rand-termen een rol spelen). De termen representeren samen, tegelijkertijd, een diskretisatie van de volgende kring-integraal:

$$\sum r \times Q = \oint Q_x dy - Q_y dx = 0$$

Echter met behulp van de stelling van Green kan een kring-integraal ten allen tijde worden omgezet in een oppervlakte-integraal, over het gearceerde gebied:

$$\oint Q_x dy - Q_y dx = \iint \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right] dx dy = 0$$

Waar we nu op terecht zijn gekomen is een eindige Differentie methode, en wel in het bijzonder een eindige volumen methode: integreer de wet van behoud van warmte om een knooppunt heen, over een eindig volumen. Dit is de grondslag voor diskretisatie met behulp van eindige volumen methoden. Wanneer we het hele verhaal nu achterstevoren afdraaien, dan komen we weer uit op een eindige elementen methode. Probeer namelijk vanuit de volumen-integraal orde-reduktie tot stand te brengen. Dit kan worden bereikt door de integraal om te zetten in een kring-integraal, met behulp van de stelling van Green. Kies de omtrek van het integratie-gebied zodanig dat ... Enzovoort.

We hebben hiermee afgeleid een zogenaamde Unificatie Stelling:

Pas een eindige Elementen methode toe op een mesh van vierhoeken, waarbij iedere vierhoek op de twee mogelijke manieren is opgedeeld in 4 elkaar (dus) overlappende driehoeken. Dan is deze methode geheel en al equivalent met een eindige Differentie (volumen) methode.

Merk op dat het geheel van toepassing is op kromlijnige rasters. Voor een wat andere benadering is gekozen in [FTP], waar eerst wordt getransformeerd naar een eindige differentie raster van vierkanten. Dit zou geen invloed mogen hebben op het eindresultaat. Het is nu wel duidelijker dat de eindige volumes, bij de onderhavige methode, *niet* netjes op elkaar aansluiten.

Een Unifikatie Stelling zoals hierboven heeft nog al wat praktische consequenties. Met name is het nu mogelijk om bij het bedrijven van eindige

elementen methoden leentjebuurt te spelen bij eindige volumemethoden. Merk op dat we de specifieke vorm van de vektor Q_x, Q_y redelijk open hebben gelaten. Er is weliswaar gesuggereerd dat het hier om diffusie gaat, maar dit gegeven is bij de afleiding ternauwernood gebruikt. Substitueer in plaats van diffusie de konvektieve termen, en kijk hoe het tegenwind principe vertaald moet worden in termen van eindige elementen. Dit programma is al gerealiseerd, zelfs in 3-D [FTP].

7.5 Labrujère's probleem

In februari 1976 schreef T.E. Labrujère, toentertijd werkzaam bij het N.L.R. (Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium), een memorandum [49] met als titel: De "Eindige Elementen - Kleinste Kwadraten" Methode toegepast op de 2D Incompressibele Stroming om een Cirkel Cylinder. Om helemaal precies te zijn een onsamendrukbare *en rotatievrije* stroming. In de rapportage werd klaar en duidelijk vastgesteld dat een rechthoekige rechthoekige toepassing van de kleinste kwadraten eindige elementen methode, tegen alle verwachting in, *niet goed blijkt te werken*. Er spreekt een grote integriteit uit dit memorandum, hetgeen alle lof verdient. In de appendix "BASIC NLR" is alle benodigde programmatuur nagespeeld. Men dient deze programma's in de aangegeven volgorde te draaien, teneinde het probleem te reproduceren [FTP].

In december 1976 werd het probleem "opgelost" door G. de Vries en D.H. Norrie, beide verbonden aan de afdeling "Mechanical Engineering" van de universiteit van Calgary (in Canada). De samenvatting ("abstract") van het desbetreffende rapport [50] wordt hieronder weergegeven, door mij vertaald in het Nederlands:

De kleinste kwadraten eindige elementen methode wordt geformuleerd voor de twee-dimensionale rotatievrije stroming van een onsamendrukbare wrijvingsloze vloeistof. Vastgesteld wordt welke eisen van continuïteit aan de snelheids-componenten moeten worden opgelegd. Aangetoond wordt dat deze veel stringenter zijn dan tot nu toe werd aangenomen. Bij het ontwikkelen van een oplossingsprocedure is daarom uitgegaan van test-functies van de vijfde orde voor beide componenten van de snelheid. Met gebruik van de kleinste kwadraten procedure wordt de stroming om een cirkel cylinder berekend. Getoond wordt dat de resultaten zeer nauwkeurig overeenstemmen met de theoretische oplossing. Einde vertaling.

Het is duidelijk dat bovenstaande "oplossing" van zuiver theoretisch belang is. De klaarblijkelijke noodzaak van vijfde orde interpolaties maakt de methode van Norrie en de Vries in de praktijk *volledig onwerkbaar*. De methode is voor dit eenvoudige geval al veel te ingewikkeld. Zodoende

is een generalisatie naar minder geïdealiseerde situaties nauwelijks mogelijk. Uiteindelijk moeten 2-D en 3-D Navier-Stokes vergelijkingen worden opgelost, op een kromlijng raster. Het vertrekpunt dient dus iets zijn wat vele malen eenvoudiger is. Met name het aantal onbekenden per knooppunt zou niet hoger moeten komen te liggen dan wat strikt nodig is: twee stuks.

Een onsamendrukbare rotatievrije stroming van een wrijvingsloze vloeistof wordt beschreven door het volgende stelsel PDV's:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 && : \text{ onsamendrukbaar} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 && : \text{ rotatievrij}\end{aligned}$$

Herin is (x, y) = coördinaten, (u, v) = snelheids-componenten.

Er bestaat voor dit stelsel vergelijkingen geen standaard Eindige Elementen methode, er is niet een of ander "natuurlijk" variatie-principe te bedenken, een procedure als in "Verenigde diffusie". De kleinste kwadraten methode vormt in zo'n geval een mogelijk alternatief. Kwadrateer de vergelijkingen zoals ze daar staan, tel de kwadraten bij elkaar op, integreer het geheel over het rekendomein, bepaal het minimum van de integraal als functie van de onbekenden. Dit is de aanpak zoals beschreven in Zienkiewicz [45] hoofdstuk 3.14.2. In ons geval:

$$\iint \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 \right\} dx.dy = \text{minimum}$$

Dit ziet er vrij eenvoudig uit, maar schijn bedriegt! Kleinste kwadraten is wel de meest *verradelijke* eindige elementen methode die ooit is uitgevonden. We hebben al gezien dat kleinste kwadraten niet werkt voor lineaire driehoeken. Mijn bedoeling is nu om te laten zien dat Labrujère's probleem ook "echt" kan worden opgelost. Daarmee bedoel ik: op een praktisch bruikbare, simpele manier. Daartoe moeten we echter naar het probleem kijken met een andere bril op: alsof het in wezen een Eindige Differentie, en geen eindige elementen probleem is. Het SaamhorigheidsBeginsel is in dit geval onontkoombaar.

Laten we de details bekijken. Om te beginnen wordt de integraal opgesplitst in element-bijdragen:

$$\sum_E \iint \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 \right\} dx.dy = \text{minimum}$$

Het is altijd voordelig om Numerieke in plaats van "exakte" integratie uit te voeren: zie [45] hoofdstuk 8.8. Dit betekent dat men funktiewaarden dient

te bepalen in zogenaamde integratiepunten p . Met ieder integratiepunt is in het algemeen een zekere gewichtsfactor w_p verbonden.

$$\sum_E \sum_p w_p \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]_p^2 + \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]_p^2 \right\} J_p = \text{minimum}$$

Hierin is J_p de Jacobiaan (determinant) van een coördinatentransformatie: zie de appendices "Driehoeks/VierkantsAlgebra". Met behulp van Differentiatie matrices kunnen de uitdrukkingen in de integrand worden uitgewerkt.

Wat nu volgt is een kleine stap voor een mens (en niet echt een grote stap voor de mensheid). We voegen de sommaties over de elementen en de integratiepunten samen tot één grote globale sommatie over integratiepunten ($I = E, p$). Dit betekent dat optellen van alle element-bijdragen, samen met het optellen van alle bijdragen op de integratiepunten, gelijkwaardig is met optellen over *alle* integratiepunten in het gehele rekendomein, al het ware in één ruk. Integratiepunten kunnen zodoende worden opgevat als elementairder dan de elementen zelf. En elementen met meer dan één integratiepunt kunnen worden beschouwd als een superpositie van elementair geïntegreerde elementen, met slechts één integratiepunt in elk ervan. Dergelijke beschouwingen weken de mens alvast een beetje los van allerhande conventionele opvattingen. Want als elementen superposities zijn, dan liggen ze ook over elkaar heen, en sluiten ze dus ook *niet* netjes op hun grenzen tegen elkaar aan.

Om de kleinste kwadraten methode te laten werken, moet het te behalen minimum een klein getal zijn. Een getal dat bovendien naar nul zal konvergeren naarmate de elementen kleiner worden gemaakt. Het is misschien niet zo'n dom idee om dan maar meteen te eisen dat het beoogde minimum *van het begin af aan nul moet zijn*. Maar in het laatste geval zou de kleinste kwadraten "variatie integraal" equivalent zijn met het volgende on-gekwadrateerde systeem van vergelijkingen. Immers een som van kwadraten van termen is nul, dan en slechts dan als elk van de afzonderlijke termen nul is:

$$\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial y} u = 0 \quad : \text{ voor elk integratiepunt}$$

In operatorvorm geschreven om te benadrukken dat $\partial/\partial(x, y)$ differentiaties voorstellen in gediskretiseerde vorm: differentiatie matrices. We hebben hier te maken met een algebraïsch en geen analytisch stel vergelijkingen.

Word u ervan bewust dat ieder "integratiepunt" in feite niets anders doet dan een tweetal vergelijkingen aandragen. Alle integratiepunten samen dragen ertoe bij dat er op deze manier een stelsel vergelijkingen ontstaat. Er is niets op tegen om dit stelsel vergelijkingen een Eindige Differentie

systeem te noemen. Laat ons nu "integratiepunt" vervangen door "eindige differentie vergelijking", en we zijn aangeland waar we wezen moeten:

Iedere goed werkende kleinste kwadraten eindige elementen methode is geheel en al gelijkwaardig met het nul stellen van de som van de kwadraten van alle vergelijkingen in een eindige differentie systeem, en heeft dus ook dezelfde oplossing als dit stelsel eindige differentie vergelijkingen.

En passant wordt hiermee de oplossing nabij gebracht voor een ander probleem: de vaak *slechte konditie* van kleinste kwadraten vergelijkingen. Merk op dat in het eindige differentie stelsel de gewichtsfactoren $w_p \cdot J_p$ niet zijn terug te vinden. Men kan ze met evenveel recht vervangen door anderssoortige schaaftactoren. Dit wordt reeds gesuggereerd in [45] hoofdstuk 3.14.2: "Wederom zou deze gewichtsfunctie zo kunnen worden gekozen dat men verzekerd is van een konstante verhouding van de verschillende element-bijdragen". Als dit de bedoeling is, dan doet bijvoorbeeld de oppervlakte van een element bij kleinste kwadraten methoden in het geheel niet ter zake. Zienkiewicz vervolgt met: "ofschoon dit nog nimmer in praktijk is gebracht". Iemand moet tenslotte de eerste zijn. Wij hebben de daad bij het woord gevoegd in BASIC programma-onderdelen getiteld "Spoor-Wegen". Het komt erop neer dan iedere vergelijking wordt gedeeld door zijn "lengte": de wortel uit de som van de kwadraten van de coëfficiënten. Dit blijkt hetzelfde te zijn als de kleinste kwadraten eindige elementen matrix wegen met zijn spoor. Vandaar de naam.

Laten we nu Labrujère's probleem nogmaals tegen het licht houden. Opdat het eindige elementen systeem een oplossing bezit, moet in bijbehorend systeem van eindige differentie vergelijkingen het aantal onbekenden N gelijk zijn aan het aantal vergelijkingen M . Is dit niet het geval, dan noemen we het stelsel *overbepaald*, en dan is het nog maar de vraag of het kleinste kwadraten minimum (snel genoeg) naar nul gaat. Eenvoudig tellen van de driehoeken laat al vlug zien dat we hier inderdaad te maken hebben met een behoorlijk overbepaald stelsel. Het aantal elementen overtreft het aantal knooppunten met bijna een faktor twee. Dit betekent dat er ongeveer twee keer zoveel "ongekwadraterde" vergelijkingen zijn dan onbekenden. Onafhankelijk van ingewikkelde argumenten zoals hogere orde continuïteit en dergelijke, hebben we hier een heel ander soort kwestie.

Norrie en de Vries hebben deze kwestie echter wel degelijk opgelost. Ze hielden om te beginnen vast aan de mesh van driehoeken. Als compensatie voor het teveel aan elementen moesten zij *heel wat* extra variabelen toevoegen. Het is nu duidelijk welke andere benadering tot de mogelijkheden behoort. Er hoeft immers alleen maar een balans gevonden te worden tussen een aantal onbekenden en een aantal vergelijkingen: M moet gelijk worden aan N . In plaats van het aantal onbekenden uit te breiden, kan men ook het aantal elementen verminderen. Een zuiver algebraïsch argument,

veel minder "geavanceerd" dan polynomen van de vijfde orde.

De kunst is alleen om het juiste element te vinden. De voorkeur gaat uit naar iets wat net zo eenvoudig is als driehoeken. Bestaat dat? Jazeker! Gerefereerd wordt naar de appendix "VierkantsAlgebra". Naast de lineaire driehoek bestaat er ook een lineaire vierhoek. Dit element heeft knooppunten op de middens van de zijden, en gaat vergezeld van extra vergelijkingen voor de onbekenden, die overigens geen beperking van de algemeenheid inhouden. Om te kunnen vaststellen of dit element eventueel geschikt is voor ons doel, hoeven we alleen maar een optelsom te maken van vergelijkingen en onbekenden. Ga uit van een raster van I bij J van zulke vierhoeken. We maken een staatje op:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{aantal vergelijkingen bulk} & = & 2I.J \\
 \text{aantal randvoorwaarden} & = & 2I + 2J \\
 \text{de extra vergelijkingen} & = & 2I.J \\
 \text{Bij elkaar opgeteld} & = & 4I.J + 2I + 2J \\
 \text{Totale aantal onbekenden} & = & 2\{(I + 1)J + I(J + 1)\}
 \end{array}$$

Het aantal vergelijkingen is dus *exakt gelijk* aan het aantal onbekenden. Onze kleinste kwadraten eindige elementen methode is equivalent met een stelsel van eindige differentie vergelijkingen. Het kleinste kwadraten minimum is om te beginnen al gelijk aan nul.

Doet deze kleinste kwadraten methode het nu ook werkelijk? Ik laat het over aan de lezer om dit eigenhandig te controleren. Als appendix opgenomen is een serie BASIC programma's "BASIC HdB". Men dient de programmatuur [FTP] in de aangegeven volgorde te laten werken.

Heel wat details zijn weliswaar geprogrammeerd, maar zullen hier niet worden behandeld. (Dit komt helaas wel vaker voor bij het ontwikkelen van software.) Ik noem het gebruik van "repeteerbare elementen": het valt te bewijzen dat de gebezigde element-matrices onafhankelijk zijn van rotaties en schaaftactoren, waardoor alle matrices identiek zijn. Het plotten van stroomlijnen is in 2-D hetzelfde als het plotten van contouren van de stroomfunctie. De laatste wordt eveneens met een kleinste kwadraten methode uitgerekend. Het eerste, grafische representatie van contouren, is een verhaal apart, over hoe men in de praktijk bijvoorbeeld te maken krijgt met Klassifikatie (Equivalentie Klassen: diskrete ondergrond).

7.6 Samenvatting

0. Voor de Numerieke Wiskunde kan met redelijke trefzekerheid worden bewezen dat puur de menselijke zelfzucht, en niet enig gebrek aan vernuft, debet is aan falend wiskundig inzicht. Dit is een alarmerende situatie.

1. Er zou EEN vak Numerieke Analyse moeten komen in plaats van de twee nu. Het vakgebied zou zo moeten zijn dat eindige Differenties en eindige Elementen niet anders zijn dan slechts twee verschillende manieren om naar dezelfde zaken te kijken. Met andere woorden: eindige Differenties en eindige Elementen zijn duale aspecten van één en slechts één universele Numerieke Analyse.

2. Het feit dat men door historische analyse van twee numerieke methoden, de eindige differentie en de eindige elementen methode, komt tot de formulering van nieuwe technieken [FTP], bewijst dat het historisme minder arm is dan door K.H. Popper in zijn onnozelheid wordt beweerd.

3. Op dit moment wordt de theorie van de samenhang of diskrete topologie iedere keer opnieuw uitgevonden, en geclaimd als originele vinding. In plaats daarvan zou de theorie deel moeten uitmaken van de reguliere wiskunde.

4. Ieder paar even lange rijen van natuurlijke getallen kan worden opgevat als de definitie van een diskrete topologie.

5. Het bepalen van de inverse samenhang is een SORTeer probleem, met de andere rij als sleutel.

6. De etiketten "knooppunt" en "element" zijn, gezien vanuit wiskundig oogpunt, onderling volkomen verwisselbaar.

7. De kwestie van de "error bounds", dat wil zeggen een algemeen vergelijk tussen de analytische en de numerieke oplossing van een probleem, komt neer op de konstruktie van een vicieuze cirkel. De opvatting dat numerieke oplossingen een gebrekkige benadering zijn van de "exakte" oplossingen, die de klassieke analyse ons zou leveren, is bijgevolg onjuist.

8. Daarom is het ook niet zinvol te verlangen dat de numerieke oplossing naar de analytische oplossing konvergeert. Korrekt daarentegen is de opvatting dat analytische oplossing en numerieke oplossing, indien beide te konstrueren zijn, naar dezelfde waarden moeten convergeren.

9. Het numerieke tegenstroom schema bevat richtingsinformatie welke voor konvektie essentieel is. Na idealisatie tot een partiële differentiaalvergelijking is deze informatie echter spoorloos verdwenen.

10. Zij nu bewezen de opvatting van de Franse geleerde Ilya Prigogine dat *ONomkeerbaarheid van de tijd* de basis is voor iedere dynamische beschrijving. De omkeerbaarheid van de tijd is een illusie, die louter en alleen te danken is aan verlies aan informatie over de richting, binnen de klassieke analytische formulering van de natuurwetten.

11. De Numerieke Analyse is de Assepoester van de wiskunde. Haar schoonheid wordt ten onrechte in verband gebracht met de funktionaal-analyse, terwijl zij daarentegen zuiver algebraïsch van aard is.

12. We hebben afgeleid de volgende Unificatie Stelling:
Pas een Eindige Elementen methode toe op een mesh van vierhoeken, waarbij iedere vierhoek op de twee mogelijke manieren is opgedeeld in 4 elkaar (dus) overlappende driehoeken. Dan is deze methode geheel en al equivalent met een Eindige Differentie (volumen) methode.

13. Het probleem van Labrujère houdt in, dat de kleinste kwadraten eindige elementen methode, indien toegepast op de conventionele manier, uiterst traag blijkt te convergeren. De oplossing van Norrie en de Vries is, vanwege de al te grote ingewikkeldheid, verstoken van enig praktisch nut.

14. Iedere goed werkende kleinste kwadraten eindige elementen methode is geheel en al gelijkwaardig met het nul stellen van de som van de kwadraten van alle vergelijkingen in een eindige differentie systeem, en heeft dan ook dezelfde oplossing als dit stelsel eindige differentie vergelijkingen.

15. Het probleem van Labrujère wordt echt opgelost door lineaire vierhoeken in te zetten. Het bijbehorende stelsel eindige differentie vergelijkingen heeft dan namelijk dezelfde rang als het aantal onbekenden.

7.7 Aantekeningen

0. In 3 dimensies wordt de lineaire driehoek gegeneraliseerd tot een lineaire tetraëder. Verdere veralgemenisering tot N dimensies is redelijk eenvoudig. De differentiatie matrix van een dergelijke N -dimensionale simplex kan heel in het algemeen algoritmisch, in BASIC, worden gedefinieerd.

1. In 3 dimensies is het basis-element van verenigde diffusie een zesvlak (hexagon) met op de acht hoekpunten een tetraëder. Laat de coördinaten en de hoekpunts-nummering van het moeder-element gegeven zijn door het volgende programma-fragment:

```
10 N=3 : FOR I=1 TO 2^N : PRINT I, : FOR K=1 TO N
20 PRINT ((I-1)\2^(K-1) MOD 2)/2 ; : NEXT K : PRINT : NEXT I
```

Dan hangen de tetraëders, topologisch, als volgt met het zesvlak samen:

1,2,3,5	2,4,1,6	3,1,4,7	4,3,2,8
5,7,6,1	6,5,8,2	7,8,5,3	8,6,7,4

2. Laat enkel de inwendige parallellogrammen van vierhoeken gegeven zijn. Dan kan men de vierhoeken zelf reconstrueren, onder voorwaarde dat één enkel hoekpunt van de mesh wordt vastgelegd.

3. Een mesh van inwendige vierhoeken is ten nauwste verwant met het verschoven raster ("staggered grid") dat gebruikelijk is bij toepassing van eindige volume methoden.

4. Zoals gezegd, de generalisatie van het vierhoekige element (quadrilateral) naar drie dimensies is het zesvlak (hexagon). Het inwendige element van dit zesvlak wordt gevormd door de middens van de vlakken met elkaar te verbinden, en blijkt een octaëder te zijn:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(T_1 + T_3 + T_5 + T_7) &\Rightarrow T_1 & \frac{1}{4}(T_2 + T_4 + T_6 + T_8) &\Rightarrow T_2 \\ \frac{1}{4}(T_1 + T_2 + T_5 + T_6) &\Rightarrow T_3 & \frac{1}{4}(T_3 + T_4 + T_7 + T_8) &\Rightarrow T_4 \\ \frac{1}{4}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) &\Rightarrow T_5 & \frac{1}{4}(T_5 + T_6 + T_7 + T_8) &\Rightarrow T_6\end{aligned}$$

5. Een willekeurige functie T wordt op de inwendige octaëder *lineair* benaderd. In het lokale isoparametrische coördinatenstelsel is dit als volgt:

$$T = T(0) + (T_2 - T_1).\xi + (T_4 - T_3).\eta + (T_6 - T_5).\zeta$$

De volgende extra vergelijkingen vormen hierbij geen enkele beperking:

$$\begin{aligned}T(0) &= \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2}(T_3 + T_4) = \frac{1}{2}(T_5 + T_6) \\ &= \frac{1}{8}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7 + T_8)\end{aligned}$$

6. Inwendige elementen kunnen mogelijk met vrucht worden ingezet bij numerieke methoden voor het oplossen van de stromings-vergelijkingen.

Appendix A

APPENDICES

A.1 Belangrijke natuurkonstanten

Diëlektrische konstante $\epsilon_0 = 8.8543 \times 10^{-12} \text{ Asec/Vm}$

Konstante van Planck $h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ Jsec}$

Massa van het elektron $m = 9.108 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Elementaire lading $q = 1.6020 \times 10^{-19} \text{ Asec}$

Lichtsnelheid in vacuüm $= c = 2.99793 \times 10^8 \text{ m/sec}$

Gravitatie konstante $= G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ m/(kg.sec}^2\text{)}$

Waarvan afgeleid:

Compton golflengte $\lambda_c = \hbar/(mc) = 3.862 \times 10^{-13} \text{ m}$

Compton trillingstijd $T_c = \hbar/(mc^2) = 1.288 \times 10^{-21} \text{ sec}$

Fijnstructuur konstante $q^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.046$

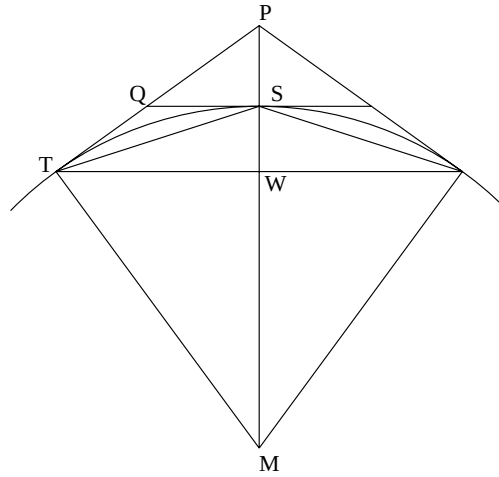
Planck massa $m_P = \sqrt{c\hbar/G} = 0.2177 \times 10^{-6} \text{ kg}$

Planck lengte $\hbar/(m_P c) = 1.6156 \times 10^{-36} \text{ m}$

Planck tijd $\hbar/(m_P c^2) = 0.5389 \times 10^{-44} \text{ sec}$

A.2 Insluitingsmethode voor π

In onderstaande figuur zien we een deel van een cirkel, met daarbinnen (halve) zijden van twee ingeschreven veelhoeken ($\overline{TW}$ en $\overline{TS}$) en daarbuiten (halve) zijden van twee omgeschreven veelhoeken ($\overline{TP}$ en $\overline{QS}$). De bedoeling is om het aantal zijden van een ingeschreven of omgeschreven veelhoek iedere keer te verdubbelen, zodat daarmee de cirkel steeds nauwkeuriger wordt ingesloten. $\overline{TW}$ wordt (de helft van) $\overline{TS}$ en $\overline{TP}$ wordt $\overline{QS}$:



De lengte van een zijde van een ingeschreven veelhoek noemen we a , de lengte van een zijde van een omgeschreven veelhoek noemen we b . We geven aan de eerste benadering een index n en aan de tweede benadering een index $2n$ mee. Zodoende is:

$$\overline{TW} = \frac{1}{2}a_n \quad \overline{TS} = a_{2n} \quad \overline{TP} = \frac{1}{2}b_n \quad \overline{QS} = \frac{1}{2}b_{2n}$$

R is de straal van de cirkel met middelpunt M :

$$\overline{MT} = \overline{MS} = R$$

Verder zijn er een aantal rechte hoeken:

$$\overline{MP} \perp \overline{TW} \quad \overline{MP} \perp \overline{QS} \quad \overline{MT} \perp \overline{PT}$$

De ingeschreven veelhoeken worden eerst behandeld. De driehoeken $\triangle SWT$ en $\triangle TWM$ zijn rechthoekig. Twee maal de stelling van Pythagoras toepassend, leiden wij af:

$$\begin{aligned} \overline{WS}^2 + \left(\frac{1}{2}a_n\right)^2 &= a_{2n}^2 \\ \overline{MW}^2 + \left(\frac{1}{2}a_n\right)^2 &= R^2 \\ \overline{MW} + \overline{WS} &= R \end{aligned}$$

Einde van het meetkundige gedeelte. De rest volgt door middel van pure algebra:

$$\sqrt{a_{2n}^2 - \left(\frac{1}{2}a_n\right)^2} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}a_n\right)^2} = R$$

$$a_{2n}^2 - (\frac{1}{2}a_n)^2 = R^2 + [R^2 - (\frac{1}{2}a_n)^2] - 2R\sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}a_n)^2}$$

$$a_{2n}/R = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2}a_n/R)^2}}$$

In de laatste uitdrukking worden twee bijna even grote getallen afgetrokken van elkaar. Dit is een gang van zaken die slecht bestand is tegen onnauwkeurigheid. Oftewel de formule is *numeriek instabiel*. Het is beter de uitdrukking om te werken. Dat gaat met behulp van het merkwaardig produkt $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$. Vermenigvuldigen we teller en noemer (gelijk 1) met een faktor van de vorm $\sqrt{x+y}$, dan komt er:

$$a_{2n}/R = \frac{\sqrt{4 - 4[1 - (\frac{1}{2}a_n/R)^2]}}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2}a_n/R)^2}}} = \frac{a_n/R}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2}a_n/R)^2}}}$$

Merk op dat in deze formule alleen grootheden voorkomen van de vorm a/R . Het is dus geen beperking van de algemeenheid indien we de straal van de cirkel normeren op $R = 1$:

$$a_{2n} = \frac{a_n}{\sqrt{2 + 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2}a_n)^2}}} \approx \frac{1}{2}a_n \quad \text{voor kleine } a$$

Met behulp van bovenstaande figuur leiden wij af voor de omgeschreven veelhoek:

$$\triangle MTP \quad \text{rechthoekig}$$

$$\triangle MTP \sim \triangle QSP \implies \frac{\overline{MT}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{TP}}{\overline{PS}}$$

Hiermee vinden we twee van de drie vergelijkingen:

$$\overline{MP}^2 = \overline{MT}^2 + \overline{TP}^2 = R^2 + (\frac{1}{2}b_n)^2$$

$$\frac{R}{\frac{1}{2}b_{2n}} = \frac{\frac{1}{2}b_n}{\overline{SP}}$$

$$\overline{SP} = \overline{MP} - R$$

Algebraïsch verwerken levert:

$$\frac{R}{\frac{1}{2}b_{2n}} = \frac{\frac{1}{2}b_n}{\sqrt{(\frac{1}{2}b_n)^2 + R^2} - R} \implies b_{2n}/R = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2}b_n/R)^2 + 1} - 1}{\frac{1}{2}b_n/R}$$

Ook deze formule is numeriek instabiel. Vermenigvuldig teller en noemer weer met een faktor, van de vorm $(x + y)$, dan komt er:

$$b_{2n}/R = \frac{4 \left[\left(\frac{1}{2} b_n/R \right)^2 + 1 - 1 \right]}{b_n/R \left[\sqrt{\left(\frac{1}{2} b_n/R \right)^2 + 1} + 1 \right]} = \frac{b_n/R}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} b_n/R \right)^2}}$$

Substitueer ook hier $b := b/R$, dan is tenslotte:

$$b_{2n} = \frac{b_n}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} b_n \right)^2}} \approx \frac{1}{2} b_n \quad \text{asymptotisch}$$

Als beginwaarde voor de ingeschreven veelhoeken kan men nemen de ingeschreven zeshoek. Dit is gemakkelijk: die heeft een zijde van 1. Drie maal deze lengte is een onderkant benadering voor π . Als beginwaarde voor de omgeschreven veelhoeken kan men nemen de omgeschreven vierhoek. Deze heeft een zijde van 2. Twee maal deze lengte is een bovenkant benadering voor π . We gaan nu van beide veelhoeken iedere keer het aantal zijden verdubbelen. De hele procedure kan gemakkelijk concreet worden gemaakt in een BASIC programmaatje dat, na het uitgebreide betoog van hierboven, verrassend kort uitpakt:

```
10 REM ** Insluitingsmethode om \pi te bepalen **
20 A=1 : B=2 : N=1 : REM Beginwaarden
30 A=A/SQR(2+2*SQR(1-(A/2)^2)) : REM Ingeschreven
40 B=B/(1+SQR(1+(B/2)^2)) : REM Omgeschreven
50 N=N*2 : PRINT 3*N*A;2*N*B : REM gaat naar \pi
60 INPUT K : GOTO 30 : END
```

Nadelig aan de methode is dat het interval voor π voortdurend wordt begrensd door *irrationale* in plaats van rationale getallen. Meetkundig elegant maar rekenkundig een ramp. Bovendien blijkt uit de asymptotische benaderingen dat de convergentie slechts lineair is: iedere keer wordt één "binaaltje" bijgemaakt.

A.3 Eenpijpsmodel

In het midden-bundel gedeelte vereenvoudigen de 2-D vergelijkingen uit het hoofdstuk "Poreus Continuum" zich tot:

$$\begin{aligned} -c.G_P \cdot \frac{dT_P}{dz} + a.(T_P - T_S) &= 0 \\ c.G_S \cdot \frac{dT_S}{dz} + a.(T_S - T_P) &= 0 \end{aligned}$$

Gewoon optellen levert al direkt een eerste uitkomst, wanneer we integreren over de lengte L van het eenpijpsmodel. We vinden de globale wet van behoud van energie: de warmte die door het primaire medium is afgestaan moet immers gelijk zijn aan de warmte die door het sekundaire medium is opgenomen:

$$-c.G_P \cdot \frac{dT_P}{dz} + c.G_S \cdot \frac{dT_S}{dz} = 0 \quad \implies \quad c.G_P \cdot (T_{PL} - T_{P0}) = c.G_S \cdot (T_{SL} - T_{S0})$$

Het quotiënt van de temperatuurverschillen sekundair- en primairzijdig is juist gelijk aan de massastroom-verhouding tussen primair en sekundair:

$$\frac{G_P}{G_S} = \frac{T_{SL} - T_{S0}}{T_{PL} - T_{P0}}$$

Deel de basisvergelijkingen nu door respectievelijk $(c.G_P)$ en $(c.G_S)$. Tel daarna op. Dit geeft:

$$\frac{d(T_P - T_S)}{dz} - a/c \cdot (1/G_P - 1/G_S)(T_P - T_S) = 0$$

Met als oplossing:

$$T_P - T_S = (T_{P0} - T_{S0}) \cdot e^{a/c(1/G_P - 1/G_S)z} \quad \text{wanneer } G_P \neq G_S$$

Samen met de globale energiebalans leidt dit voor $G_P = G_S$ tot een singulier stelsel. Daarom doen we het volgende. Integreer één van de basisvergelijkingen van 0 tot L . Dit geeft:

$$-c.G_P \cdot (T_{PL} - T_{P0}) + a \cdot \int_0^L (T_P - T_S) dz = 0$$

De integraal wordt uitgewerkt met behulp van de zojuist gevonden oplossing:

$$\begin{aligned} \int_0^L (T_P - T_S) dz &= (T_{P0} - T_{S0}) \cdot \int_0^L e^{a/c(1/G_P - 1/G_S)z} dz = \\ &= L \cdot (T_{P0} - T_{S0}) \frac{e^{a/c(1/G_P - 1/G_S)L} - 1}{a/c(1/G_P - 1/G_S)L} \end{aligned}$$

Definieer dimensieloze grootheden $P = a.L/(c.G_P)$ en $S = a.L/(c.G_S)$. En hiermee de faktor W_L als:

$$W_L = \frac{e^{P-S} - 1}{P - S} \quad \text{voor } P \neq S$$

Voor $P = S$ nemen we de limiet van deze uitdrukking, dat is juist de afgeleide van de e-macht in het punt 0:

$$W_L = 1 \quad \text{voor } P = S$$

Dan is, uitgedrukt in de dimensieloze grootheden P en S :

$$(T_{PL} - T_{P0}) - P.W_L.(T_{P0} - T_{S0}) = 0$$

Hierin zijn T_{PL} en T_{S0} de respektievelijke intree-temperaturen van de (tegenstroom) warmtewisselaar. Die zijn bekend. T_{P0} en T_{SL} zijn de onbekende uittree-temperaturen. Op grond van de fysica liggen alle temperaturen in de warmtewisselaar tussen T_{S0} en T_{PL} . Het stelsel vergelijkingen is lineair en ongevoelig voor toevoeging van een konstante term. Het is daarom geen beperking van de algemeenheid wanneer we alle temperaturen *normeren* tussen $T_{S0} = 0$ en $T_{PL} = 1$. Substitueer:

$$T_P := \frac{T_P - T_{S0}}{T_{PL} - T_{S0}} \quad ; \quad T_S := \frac{T_S - T_{S0}}{T_{PL} - T_{S0}}$$

Dan wordt de vergelijking hierboven vereenvoudigd tot:

$$(1 - T_{P0}) - P.W_L.T_{P0} = 0 \quad \implies \quad T_{P0} = T_{P0} - T_{S0} = \frac{1}{1 + P.W_L}$$

Het axiale verloop van de temperaturen is te vinden door de basisvergelijkingen te integreren van 0 tot z in plaats van 0 tot L :

$$T_P(z) = T_{P0} + P.W(z).(T_{P0} - T_{S0}) \quad ; \quad T_S(z) = T_{S0} + S.W(z).(T_{P0} - T_{S0})$$

Hierin is $(T_{P0} - T_{S0}) = 1/(1 + P.W_L)$. Bovendien geldt:

$$W(z) = \frac{e^{(P-S).z/L} - 1}{(P - S)} \quad \text{voor } P \neq S \quad ; \quad W(z) = z/L \quad \text{voor } P = S$$

Door de faktor z/L wordt gesuggereerd dat het goed is om ook de totale lengte op 1 te normeren. Het volgende BASIC programmaatje schetst de temperatuurprofielen, bij variabele dimensieloze grootheden P en S :

```

10 REM ** Eenpijpsmodel Tegenstroom Warmtewisselaar **
20 PRINT "P & S"; : INPUT P,S : REM Dimensieloze grootheden
30 TS0=0 : TPL=1 : REM Intree Temperaturen genormeerd
40 WL=1 : IF P<>S THEN WL=(EXP(P-S)-1)/(P-S)
50 TP0=1/(1+P*WL) : Z=0 : TP=TP0 : TS=0
55 N=100 : SCREEN(1) : CLS : REM Temperatuurgrenzen:

```

```

56 LINE(10,50)-(210,50) : LINE(10,150)-(210,150)
60 FOR K=2 TO N : Z=(K-1)/(N-1) : REM Lengte genormeerd
70 ZV=Z : W=Z : IF P<>S THEN W=(EXP((P-S)*Z)-1)/(P-S)
80 TPV=TP : TSV=TS : TP=TP0+P*W/(1+P*WL) : TS=S*W/(1+P*WL)
90 LINE(10+200*ZV,150-100*TSV)-(10+200*Z,150-100*TS)
100 LINE(10+200*ZV,150-100*TPV)-(10+200*Z,150-100*TP)
110 NEXT K : END

```

A.4 Maresca en Dwyer

Gebruikt bij Neratoom werd de volgende zogenaamde "correlatie", om de warmteoverdrachtscoëfficiënt van het primaire natrium, aan de bundel-zijde van een warmtewisselaar, te bepalen. De correlatie stond binnenshuis bekend onder de naam "Maresca en Dwyer".

Ingangsgrootheden zijn d_u = buitendiameter pijpen, s = steek van de bundel, d_h = hydraulische diameter, V = stroomsnelheid, T = heersende temperatuur. De hydraulische diameter is gelijk aan vier keer de oppervlakte gedeeld door de bevochtigde omtrek van een vloeistofkanaal. Voor pijpen in een driehoeks-steek geeft dit: $d_h = \frac{1}{2}s^2\sqrt{3}/(\pi d_u)$.

Van de temperatuur T afhankelijke stofgrootheden van natrium zijn: C_p = warmtecapaciteit, λ = geleidingsvermogen, ρ = dichtheid, η = viscositeit. Er worden vervolgens standaard een aantal dimensieloze grootheden berekend: de getallen van Reynolds, Prandtl en Pechlet.

$$Re = \frac{V d_h}{\eta \rho} \quad Pr = \frac{\eta \rho C_p}{\lambda} \quad Pe = Re.Pr$$

De dimensieloze getallen zijn op hun beurt invoer voor de volgende formules:

$$f = 0.4824 + 0.88(d_u/s) \quad \epsilon_m = f[2 + 0.00215(f.Re)^{0.88}] \quad \psi = 1 - \frac{1.82}{Pr.\epsilon_m^{1.4}}$$

Hiermee wordt voor twee gevallen het dimensieloze getal van Nusselt berekend:

$$\begin{aligned} \psi &\geq 0 : \\ Nu &= 6.66 + 3.126(s/d_u) + 1.184(s/d_u)^2 + 0.0155(\psi Pe)^{0.86} \\ \psi &< 0 : \\ Nu &= -2.79 + 3.97(s/d_u) + 1.025(s/d_u)^2 + 3.12^{10} \log(Re) - 0.265^{10} \log^2(Re) \end{aligned}$$

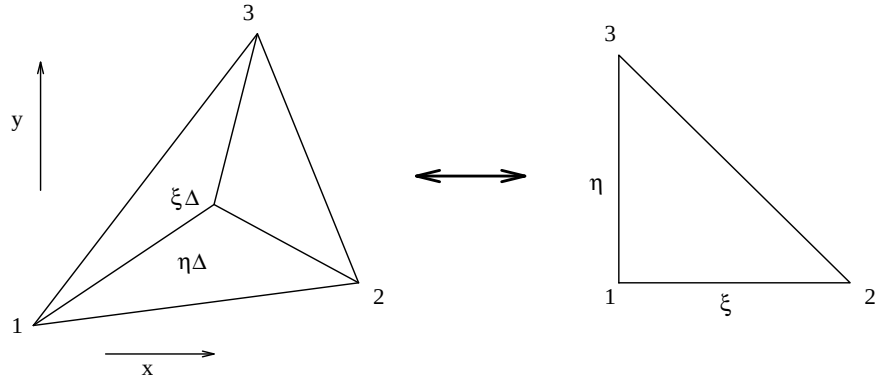
Uit het getal van Nusselt tenslotte berekent men de bundelzijdige warmteoverdrachts-coëfficiënt, volgens $\alpha = Nu.\lambda/d_h$.

A.5 DriehoeksAlgebra

Laten we eerst gaan kijken naar de eenvoudigste niet-triviale elementvorm in twee dimensies: de lineaire driehoek. Het gedrag van een functie wordt binnen een driehoek benaderd door een *lineaire* interpolatie tussen de functiewaarden op de hoekpunten. Hoekpunten die meestal ook dienen als *knooppunten*: punten waarop diverse driehoeken in een eindige elementen *mesh* aan elkaar, en aan andere elementen worden vastgeknoopt. Laat T een willekeurige functie zijn, lineair geïnterpoleerd tussen de knooppuntswaarden, en x, y vlakke cartesische coördinaten, dan is er een lineair verband:

$$T = A.x + B.y + C$$

Waarin de constanten A, B, C nog nader bepaald dienen te worden.



Substitueer $x = x_k$ and $y = y_k$ met $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ A \\ B \end{bmatrix}$$

Om te beginnen is:

$$T_1 = A.x_1 + B.y_1 + C$$

De eerste van deze vergelijkingen kan dus reeds gebruikt worden om de constante C eens en voor altijd te elimineren:

$$T - T_1 = A.(x - x_1) + B.(y - y_1)$$

De constanten A en B worden nu bepaald door:

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= A.(x_2 - x_1) + B.(y_2 - y_1) \\ T_3 - T_1 &= A.(x_3 - x_1) + B.(y_3 - y_1) \end{aligned}$$

Twee vergelijkingen met twee onbekenden. De oplossing wordt gevonden met de regel van Cramer. Kennis van lineaire algebra is onmisbaar bij het omgaan met zaken in de Numerieke Wiskunde, maar in dit eenvoudige geval kan het ook op de volgende manier. Zorg dat de bovenste vergelijking wordt vermenigvuldigd met $(y_3 - y_1)$, de onderste met $(y_2 - y_1)$. Aftrekken elimineert dan B . Insgelijks wordt A geëlimineerd door vermenigvuldigen met respectievelijk $(x_3 - x_1)$ en $(x_2 - x_1)$. Het resultaat is:

$$\begin{aligned} A &= [(y_3 - y_1) \cdot (T_2 - T_1) - (y_2 - y_1) \cdot (T_3 - T_1)] / \Delta \\ B &= [(x_2 - x_1) \cdot (T_3 - T_1) - (x_3 - x_1) \cdot (T_2 - T_1)] / \Delta \end{aligned}$$

Er bestaan verschillende manieren om de determinant Δ te schrijven. Het is handig als men zich sommige vormen weet te herinneren, als dat zo te pas komt:

$$\begin{aligned} \Delta &= (x_2 - x_1) \cdot (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y_2 - y_1) \\ \Delta &= 2 \times \text{oppervlakte driehoek} \\ \Delta &= x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_3 - y_3 \cdot x_1 \\ \Delta &= x_1 \cdot (y_2 - y_3) + x_2 \cdot (y_3 - y_1) + x_3 \cdot (y_1 - y_2) \\ \Delta &= y_1 \cdot (x_3 - x_2) + y_2 \cdot (x_1 - x_3) + y_3 \cdot (x_2 - x_1) \\ \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Hoe het ook zij, uit het bovenstaande kan men konkluderen dat:

$$T - T_1 = \xi \cdot (T_2 - T_1) + \eta \cdot (T_3 - T_1)$$

Hierin is:

$$\begin{aligned} \xi &= [(y_3 - y_1) \cdot (x - x_1) - (x_3 - x_1) \cdot (y - y_1)] / \Delta \\ \eta &= [(x_2 - x_1) \cdot (y - y_1) - (y_2 - y_1) \cdot (x - x_1)] / \Delta \end{aligned}$$

Of:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(y_3 - y_1) & -(x_3 - x_1) \\ -(y_2 - y_1) & +(x_2 - x_1) \end{bmatrix} / \Delta \begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix}$$

Herkenbaar is de inverse van het volgende probleem:

$$\begin{bmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (x_3 - x_1) \\ (y_2 - y_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

Of:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \xi \cdot (x_2 - x_1) + \eta \cdot (x_3 - x_1) \\ y - y_1 &= \xi \cdot (y_2 - y_1) + \eta \cdot (y_3 - y_1) \end{aligned}$$

Maar we vonden in eerste instantie ook:

$$T - T_1 = \xi.(T_2 - T_1) + \eta.(T_3 - T_1)$$

We zien dat *precies dezelfde* uitdrukking opgaat voor zowel de functie T als voor de coördinaten x en y . Hiermee is uitgelegd wat men pleegt te verstaan onder een *isoparametrische* ("zelfde parameters") transformatie. Isoparametrische transformaties zullen we nog een aantal malen tegenkomen. Refererend aan de formules welke ξ en η uitdrukken in x en y :

$$\begin{aligned}\xi &= [(y_3 - y_1).(x - x_1) - (x_3 - x_1).(y - y_1)]/\Delta \\ \eta &= [(x_2 - x_1).(y - y_1) - (y_2 - y_1).(x - x_1)]/\Delta\end{aligned}$$

Dus ξ kan worden geïnterpreteerd als: oppervlakte van de deel-driehoek welke wordt opgespannen door de vectoren $(x - x_1, y - y_1)$ en $(x_3 - x_1, y_3 - y_1)$, gedeeld door de oppervlakte van de driehoek als geheel. En η kan worden geïnterpreteerd als: oppervlakte van de deel-driehoek welke wordt opgespannen door de vectoren $(x - x_1, y - y_1)$ en $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, gedeeld door de oppervlakte van de driehoek als geheel. Dit is de reden waarom ξ en η wel *oppervlakte-coördinaten* worden genoemd: zie bovenstaande figuur. Hierin is (twee keer) de oppervlakte van de driehoek als geheel aangeduid met Δ . Er bestaan zelfs *drie* van deze coördinaten in de literatuur [45]. De derde oppervlakte-coördinaat is natuurlijk afhankelijk van de andere twee, en gelijk aan $(1 - \xi - \eta)$. In plaats van te spreken over oppervlakte-coördinaten, geven wij de voorkeur aan de benaming *lokale coördinaten* ξ en η van een element, dit in tegenstelling tot de *globale coördinaten* x en y . Het is mogelijk dat lokale coördinaten overeenkomen met globale coördinaten. Een driehoek waarvoor dit het geval is wordt een *moeder-element* (Engels: parent element) genoemd. De beeltenis van zo'n moeder-element vindt men evenzo in bovenstaande figuur: het is een gelijkbenige rechthoekige driehoek. Beschouw nogmaals de uitdrukking:

$$T - T_1 = \xi.(T_2 - T_1) + \eta.(T_3 - T_1)$$

Partieel differentieren naar ξ en η geeft:

$$\partial T / \partial \xi = T_2 - T_1 \quad ; \quad \partial T / \partial \eta = T_3 - T_1$$

Dus:

$$T = T(0) + \xi \frac{\partial T}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

Dit is een stuk van de Taylorreeks-ontwikkeling van $T(\xi, \eta)$ rondom (1). Zulke Taylorreeks-ontwikkelingen komen erg vaak voor in de eindige differentie analyse. Schrijf anderszins als volgt:

$$T = (1 - \xi - \eta).T_1 + \xi.T_2 + \eta.T_3$$

De functies $(1 - \xi - \eta)$, ξ , η noemt men de *vormfuncties* (Engels: shape functions) van het Eindige Element. Vormfuncties N_k hebben de eigenschap dat ze één zijn in een van de hoekpunten (k) en nul in alle andere hoekpunten. In ons geval zijn de vormfuncties:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta \quad ; \quad N_2 = \xi \quad ; \quad N_3 = \eta$$

We hebben nu dus twee representaties, die bijna triviale hetzelfde zijn:

$$\begin{aligned} T &= T_1 + \xi.(T_2 - T_1) + \eta.(T_3 - T_1) && : \text{Eindige Differenties} \\ T &= (1 - \xi - \eta).T_1 + \xi.T_2 + \eta.T_3 && : \text{Eindige Elementen} \end{aligned}$$

Wat voor termen kan men diskretizeren op het domein van een lineaire driehoek? In de eerste plaats de functie $T(x, y)$ zelf natuurlijk. Maar men kan ook een poging ondernemen voor de partiële afgeleiden $\partial T / \partial x$ en $\partial T / \partial y$. Gebruik makend van het bovenstaande, vinden we:

$$\begin{aligned} \partial T / \partial x &= A = [(y_3 - y_1).(T_2 - T_1) - (y_2 - y_1).(T_3 - T_1)] / \Delta \\ \partial T / \partial y &= B = [(x_2 - x_1).(T_3 - T_1) - (x_3 - x_1).(T_2 - T_1)] / \Delta \end{aligned}$$

Door termen behorend bij dezelfde knooppuntswaarden T_k bijeen te nemen, kan dit ook worden geschreven als:

$$\Delta \begin{bmatrix} \partial T / \partial x \\ \partial T / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(y_2 - y_3) & +(y_3 - y_1) & +(y_1 - y_2) \\ -(x_2 - x_3) & -(x_3 - x_1) & -(x_1 - x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

Of, in de vorm van een Operator:

$$\begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +(y_2 - y_3) & +(y_3 - y_1) & +(y_1 - y_2) \\ -(x_2 - x_3) & -(x_3 - x_1) & -(x_1 - x_2) \end{bmatrix} / \Delta$$

Het rechterlid zal in het vervolg *Differentiatie Matrix* worden genoemd; de term is afkomstig van Csendes [48]. Hiermee kunnen we zeggen dat de gradiënt-operator, op een lineaire driehoek, wordt gerepresenteerd door een 2×3 differentiatie matrix.

A.6 VierkantsAlgebra

Laten we nu enige aandacht schenken aan het op één na eenvoudigste element in twee dimensies: de vierhoek. Het verloop van een willekeurige functie binnen een vierhoek kan worden benaderd door een *bi-lineaire* interpolatie tussen de functie-waarden in de hoekpunten of knooppunten.

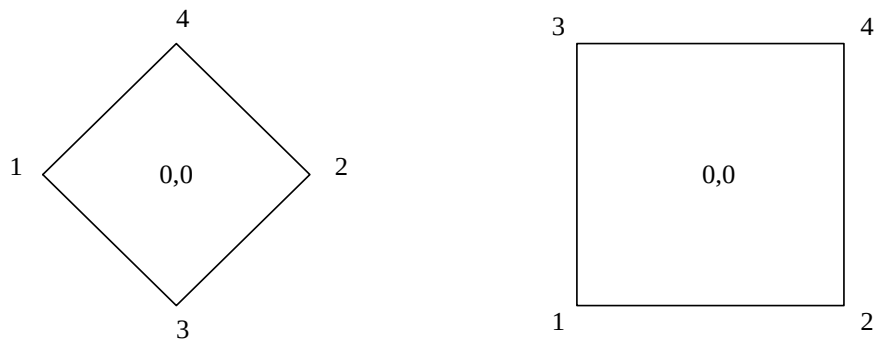
Stel dat T zo'n funktieverloop is, en x, y de globale coördinaten. Probeer dan:

$$T = A_T + B_T.x + C_T.y + D_T.x.y$$

Beschouw de vierhoek, linksonder in beeld, waarbij de knooppunts-coördinaten worden gedefinieerd door de tweede en derde kolom van de matrix die ontstaat doordat T wordt gespecificeerd, vertikaal voor de knooppunten en horizontaal voor de basis-functies $1, x, y, x.y$:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & +\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & +\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_T \\ B_T \\ C_T \\ D_T \end{bmatrix}$$

De laatste kolom van de matrix is nul. Dus A, B, C en D kunnen niet worden gevonden op deze manier. In het algemeen kan een methode als gevolgd bij de lineaire driehoek, niet worden gebruikt voor elementen van hogere orde.



Er is echter een andere oplossing. Neem aan dat dezelfde uitdrukking geldig is voor de functie T , als ook voor de coördinaten x en y : hetgeen zeggen wil dat we wederom een *isoparametrische transformatie* hebben. De volgende stap is dan een geschikt *moeder-element* te vinden. Het bovenstaande werkt in ieder geval niet. Misschien hebben we meer succes met het element rechts in beeld:

$$T = A_T + B_T.\xi + C_T.\eta + D_T.\xi.\eta$$

Aangenomen wordt dat de *lokale coördinaten* binnen de moeder-vierhoek liggen tussen $-\frac{1}{2} \leq \xi \leq +\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2} \leq \eta \leq +\frac{1}{2}$: het is een eenheids-vierkant.

Dit geeft:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} \\ 1 & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_T \\ B_T \\ C_T \\ D_T \end{bmatrix} \quad \text{F.E.} \leftarrow \text{F.D.}$$

Opgemerkt wordt dat bovenstaande matrix *orthogonaal* is (: de kolommen staan loodrecht op elkaar). Dit betekent ook dat de "conditie" optimaal is (: bij het bepalen van de inverse gaan weinig decimalen verloren). Bovendien is, afgezien van schaaufactoren, de inverse gelijk aan de getransponeerde:

$$\begin{bmatrix} A_T \\ B_T \\ C_T \\ D_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{4} \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} \quad \text{F.D.} \leftarrow \text{F.E.}$$

Uitgeschreven:

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{4}(+T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \\ B_T &= \frac{1}{2}(-T_1 + T_2 - T_3 + T_4) \\ C_T &= \frac{1}{2}(-T_1 - T_2 + T_3 + T_4) \\ D_T &= 1(+T_1 - T_2 - T_3 + T_4) \end{aligned}$$

A_T, B_T, C_T, D_T zijn gelijk aan lokale partiële afgeleiden:

$$T(0) = A_T \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \xi}(0) = B_T \quad ; \quad \frac{\partial T}{\partial \eta}(0) = C_T \quad ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} = D_T$$

Deze coëfficiënten vormen een Eindige Differentie formulering:

$$T = T(0) + \frac{\partial T}{\partial \xi}(0) \cdot \xi + \frac{\partial T}{\partial \eta}(0) \cdot \eta + \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \xi \cdot \eta$$

Vormfuncties worden gevonden als volgt:

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi \cdot \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{2} \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix}$$

Uitgeschreven:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta + \xi \cdot \eta = (\frac{1}{2} - \xi) \cdot (\frac{1}{2} - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\eta - \xi \cdot \eta = (\frac{1}{2} + \xi) \cdot (\frac{1}{2} - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta - \xi \cdot \eta = (\frac{1}{2} - \xi) \cdot (\frac{1}{2} + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}\eta + \xi \cdot \eta = (\frac{1}{2} + \xi) \cdot (\frac{1}{2} + \eta) \end{aligned}$$

Deze coëfficiënten vormen een Eindige Elementen formulering:

$$T = N_1.T_1 + N_2.T_2 + N_3.T_3 + N_4.T_4$$

Iedere vorm-funkie N_k heeft waarde 1 in hoekpunt (k) en is nul in alle andere hoekpunten. Globale en lokale coördinaten in een willekeurige vierhoek staan met elkaar in verband door middel van de isoparametrische transformatie:

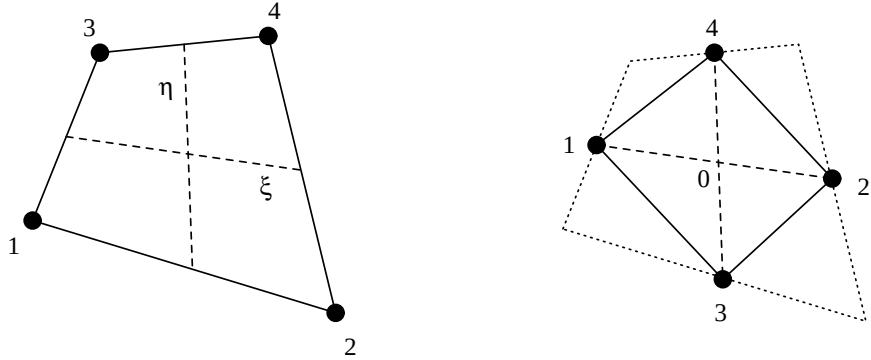
$$\begin{aligned} x &= N_1.x_1 + N_2.x_2 + N_3.x_3 + N_4.x_4 \\ y &= N_1.y_1 + N_2.y_2 + N_3.y_3 + N_4.y_4 \end{aligned}$$

De Eindige Differentie representatie hiervan is:

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= A_x + B_x.\xi + C_x.\eta + D_x.\xi.\eta \\ y(\xi, \eta) &= A_y + B_y.\xi + C_y.\eta + D_y.\xi.\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) & ; & \quad A_y = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \\ B_x &= \frac{1}{2}(x_2 + x_4) - \frac{1}{2}(x_1 + x_3) & ; & \quad B_y = \frac{1}{2}(y_2 + y_4) - \frac{1}{2}(y_1 + y_3) \\ C_x &= \frac{1}{2}(x_3 + x_4) - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & ; & \quad C_y = \frac{1}{2}(y_3 + y_4) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ D_x &= (+x_1 - x_2 - x_3 + x_4) & ; & \quad D_y = (+y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \end{aligned}$$

De oorsprong van het lokale (ξ, η) coördinatensysteem wordt bepaald door $\xi = 0$ en $\eta = 0$. Dus door $(x, y)(O) = (A_x, A_y) = (\bar{x}, \bar{y}) = \text{zwaartepunt}$. De ξ -as wordt gedefinieerd door $-\frac{1}{2} < \xi < +\frac{1}{2}$ en $\eta = 0$. Dus door een (gestreepte) lijn $(x, y) = (A_x, A_y) + \xi.(B_x, B_y)$. De η -as wordt gedefinieerd door $-\frac{1}{2} < \eta < +\frac{1}{2}$ en $\xi = 0$. Dus door een (gestreepte) lijn $(x, y) = (A_x, A_y) + \eta.(C_x, C_y)$.



We leiden af dat het funktieverloop op de zijden van een vierhoek *lineair*

is:

$$\begin{aligned} T(-\frac{1}{2}, \eta) &= (\frac{1}{2} - \eta).T_1 + (\frac{1}{2} + \eta).T_3 \\ T(+\frac{1}{2}, \eta) &= (\frac{1}{2} - \eta).T_2 + (\frac{1}{2} + \eta).T_4 \\ T(\xi, -\frac{1}{2}) &= (\frac{1}{2} - \xi).T_1 + (\frac{1}{2} + \xi).T_2 \\ T(\xi, +\frac{1}{2}) &= (\frac{1}{2} - \xi).T_2 + (\frac{1}{2} + \xi).T_4 \end{aligned}$$

Dit betekent dat funktiewaarden midden op de zijden het gemiddelde zijn van de funktiewaarden in de hoekpunten. Hierbij is het triviaal dat:

$$\frac{1}{2}(T_1 + T_2) + \frac{1}{2}(T_3 + T_4) = \frac{1}{2}(T_1 + T_3) + \frac{1}{2}(T_2 + T_4)$$

Stel dat we nu, binnen het bestaande kader, een nieuwe vierhoek konstrueren, ook met hoekpunten die genummerd zijn volgens $(1, 2, 3, 4)$. De overgang van de oude naar de nieuwe hoekpunten is als volgt gedefinieerd (zie figuur):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(T_1 + T_3) &\Rightarrow T_1 & \frac{1}{2}(T_2 + T_4) &\Rightarrow T_2 \\ \frac{1}{2}(T_1 + T_2) &\Rightarrow T_3 & \frac{1}{2}(T_3 + T_4) &\Rightarrow T_4 \end{aligned}$$

Voor de knooppuntswaarden van de functie T op de hoekpunten van de inwendige vierhoek geldt nu, krachtens bovenvermelde eigenschap van gemiddelden:

$$T_1 + T_2 = T_3 + T_4$$

Evenzo voor de globale coördinaten x en y , op grond van isoparametrick. Overigens is ook rechtstreeks in te zien dat:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \quad y_1 + y_2 = y_3 + y_4$$

Meetkundig betekent dit dat de inwendige vierhoek vanzelf altijd een parallellogram is.

De Eindige Differentie representatie van de originele vierhoek wordt gebruikt om die van de inwendige vierhoek af te leiden:

$$T = A_T + B_T.\xi + C_T.\eta + D_T.\xi.\eta$$

Omgeschreven naar de nieuwe hoekpunten:

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{4}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) = \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2}(T_3 + T_4) = T_0 \\ B_T &= T_2 - T_1 = \partial T / \partial \xi \\ C_T &= T_4 - T_3 = \partial T / \partial \eta \\ D_T &= 0 \end{aligned}$$

De term A_T is juist de gemiddelde waarde, gelokaliseerd in het middelpunt of de lokale oorsprong als $T(0)$; we schrijven T_0 .

Uit het feit dat de term met D_T nul is, mag men het volgende konkluderen:

Door de middens van de zijden van een willekeurige vierhoek met elkaar te verbinden, ontstaat de zogenaamde inwendige vierhoek van het origineel. Geen beperking van de algemeenheid is de volgende vergelijking, die een extra relatie legt tussen de knooppuntswaarden van een willekeurige functie T op het inwendige element:

$$T_1 + T_2 = T_3 + T_4$$

Niet alleen binnen eenvoudige driehoeken, maar ook binnen de inwendige vierhoek van een willekeurig vierhoekig element heerst een lineair funktieverloop:

$$T = T_0 + (T_2 - T_1) \cdot \xi + (T_4 - T_3) \cdot \eta$$

Voor de globale coördinaten geldt, insgelijks:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (x_2 - x_1) \cdot \xi + (x_4 - x_3) \cdot \eta \\ y &= y_0 + (y_2 - y_1) \cdot \xi + (y_4 - y_3) \cdot \eta \end{aligned}$$

Dank zij het lineaire verband is het mogelijk om ξ en η omgekeerd uit te drukken in x en y :

$$\begin{aligned} \xi &= [+(y_4 - y_3)(x - x_0) - (x_4 - x_3)(y - y_0)] / \Delta \\ \eta &= [-(y_2 - y_1)(x - x_0) + (x_2 - x_1)(y - y_0)] / \Delta \end{aligned}$$

Met:

$$\Delta = (x_2 - x_1) \cdot (y_4 - y_3) - (x_4 - x_3) \cdot (y_2 - y_1)$$

Een interpretatie van (ξ, η) als oppervlakte-coördinaten, zoals bij de lineaire driehoek, ligt voor de hand. We kunnen nu ook schrijven:

$$T - T_0 = \frac{\partial T}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial T}{\partial y}(y - y_0)$$

Waarbij:

$$\begin{aligned} \partial T / \partial x &= [(T_2 - T_1) \cdot (y_4 - y_3) - (T_4 - T_3) \cdot (y_2 - y_1)] / \Delta \\ \partial T / \partial y &= [(x_2 - x_1) \cdot (T_4 - T_3) - (x_4 - x_3) \cdot (T_2 - T_1)] / \Delta \end{aligned}$$

Dit geeft de differentiatie-matrix van het inwendige element van een vierhoek:

$$\begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(y_4 - y_3) & +(y_4 - y_3) & +(y_2 - y_1) & -(y_2 - y_1) \\ +(x_4 - x_3) & -(x_4 - x_3) & -(x_2 - x_1) & +(x_2 - x_1) \end{bmatrix} / \Delta$$

Daarmee kunnen we zeggen dat de gradiënt-operator, op een lineaire vierhoek, wordt gerepresenteerd door een 2×4 differentiatie matrix.

Herhalen we tot slot:

$$\begin{aligned}A_T &= \frac{1}{2}(T_1 + T_2) = \frac{1}{2}(T_3 + T_4) \\B_T &= T_2 - T_1 \\C_T &= T_4 - T_3\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat omgekeerd:

$$\begin{aligned}T_1 &= A_T - \frac{1}{2}B_T \\T_2 &= A_T + \frac{1}{2}B_T \\T_3 &= A_T - \frac{1}{2}C_T \\T_4 &= A_T + \frac{1}{2}C_T\end{aligned}$$

Precies de on-omkeerbare matrix die we vonden bij aanvang van dit hoofdstuk. De cirkel wordt gesloten door op te merken dat het moeder-element van de inwendige vierhoek reeds afgebeeld wordt in desbetreffende figuur links.

A.7 BASIC NLR

```
10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
50 REM Mesh Generator
60 REM -----
140 INPUT "Aantal rasterlijnen in radiale richting (7) : ",NDR
150 INPUT "Aantal rasterlijnen in omtreks-richting (5) : ",NPH
160 IF NDR<=0 THEN NDR=7
170 IF NPH<=0 THEN NPH=5
180 REM
190 REM ... Initialisatie ...
200 LIMC=NDR*NPH : REM aantal rasterpunten
205 LIMT=(NDR-1)*(NPH-1) : REM aantal elementen
210 LIMB=2*NDR+2*NPH : REM aantal randpunten
220 REM
230 PRINT "Algemene gegevens ..."
240 OPEN "R",#1,"NLRGENER.BIN",16
250 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
260 LSET F1$=MKI$(LIMC) : LSET F2$=MKI$(LIMT)
270 LSET F3$=MKI$(LIMB) : LSET F4$=MKI$(NPH)
280 PUT #1,1 : CLOSE #1
290 REM
300 PRINT "Coordinaten ..."
```

```

310 OPEN "R",#1,"NLRCOORD.BIN",8
320 FIELD #1, 4 AS X$, 4 AS Y$
330 PI=4*ATN(1) : DPHI=.5*PI/(NPH-1)
340 R=10 : P=R^(1/(NDR-1))-1 : REM Buitengrens radiaal
350 FOR I=1 TO NDR
360 R=(1+P)^(I-1) : REM Geeft equivalente elementen
370 FOR J=1 TO NPH
380 PHI=(J-1)*DPHI : K=(I-1)*NPH+J
390 X=R*COS(PHI) : Y=R*SIN(PHI)
400 LSET X$=MKS$(X) : LSET Y$=MKS$(Y)
410 PUT #1,K : NEXT J : NEXT I
420 CLOSE #1
430 REM
440 PRINT "Topologie ..."
450 OPEN "R",#1,"NLRTOPOL.BIN",16
460 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2Y$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
470 FOR I=1 TO NDR-1 : FOR J=1 TO NPH-1
480 K=(I-1)*(NPH-1)+J
490 KON2=(I-1)*NPH+J : KON1=(I-1)*NPH+J+1
500 KON3=I*NPH+J : KON4=I*NPH+J+1
510 REM PRINT KON1,KON2,KON3,KON4
520 LSET F1$=MKI$(KON1) : LSET F2$=MKI$(KON2)
530 LSET F3$=MKI$(KON3) : LSET F4$=MKI$(KON4)
540 PUT #1,K : NEXT J : NEXT I
550 CLOSE #1
560 REM
570 PRINT "Randvoorwaarden ..."
580 OPEN "R",#1,"NLRBOUND.BIN",8
590 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
600 FOR I=1 TO NDR : REM Instroming ...
610 NOB1=(I-1)*NPH+1 : NOB2=1
620 REM PRINT NOB1,NOB2
630 LSET F1$=MKI$(NOB1) : LSET F2$=MKI$(NOB2)
640 PUT #1,I : NEXT I : L=NDR
650 FOR I=1 TO NPH : REM Cylinder ...
660 NOB1=I : NOB2=2
670 REM PRINT NOB1,NOB2
680 LSET F1$=MKI$(NOB1) : LSET F2$=MKI$(NOB2)
690 PUT #1,I+L : NEXT I : L=L+NPH
700 FOR I=1 TO NDR : REM Symmetrie ...
710 NOB1=NPH*I : NOB2=1
720 REM PRINT NOB1,NOB2

```

```

730 LSET F1$=MKI$(NOB1) : LSET F2$=MKI$(NOB2)
740 PUT #1,I+L : NEXT I : L=L+NDR
750 FOR I=1 TO NPH : REM Uitstroming ...
760 NOB1=NPH*(NDR-1)+I : NOB2=3
770 REM PRINT NOB1,NOB2
780 LSET F1$=MKI$(NOB1) : LSET F2$=MKI$(NOB2)
790 PUT #1,I+L : NEXT I : CLOSE #1
800 END

10 REM Probleem van Labrujere:
20 REM =====
30 REM Samenstellen en oplossen vergelijkingen
40 REM =====
50 REM Gegevens inlezen
60 REM -----
100 OPEN "R",#1,"NLRGENER.BIN",16
110 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
120 GET #1,1 : LIMC=CVI(F1$) : LIMIT=CVI(F2$)
125 LIMB=CVI(F3$) : NPH=CVI(F4$)
130 CLOSE #1 : NN=2*LIMC : NB1=2*NPH+4
140 REM
150 DIM X(LIMC),Y(LIMC),S(NN,NB1),B(NN)
160 REM
170 REM Coördinaten:
180 OPEN "R",#1,"NLRCOORD.BIN",8
190 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
200 FOR I=1 TO LIMC : GET #1,I
210 X(I)=CVS(F1$) : Y(I)=CVS(F2$)
220 NEXT I : CLOSE #1
230 REM
240 REM Grote matrix en vector schoonmaken:
250 FOR I=1 TO NN : FOR J=1 TO NB1 : S(I,J)=0 : NEXT J
255 B(I)=0 : NEXT I
260 REM
270 DIM NO(4),NR(8),E(8,8),R(2),A(6),NG(3,2)
280 REM
290 OPEN "R",#1,"NLRTOPOL.BIN",16
300 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
305 GET #1,1
310 NO(1)=CVI(F1$) : NO(2)=CVI(F2$)
315 NO(3)=CVI(F3$) : NO(4)=CVI(F4$)
320 PRINT "Repeteerbaar element ..." : GOSUB 830

```

```

330 REM
340 PRINT "Assemblage procedure voor";LIMT;"elementen ..."
360 FOR F=1 TO LIMT : GET #1,F : PRINT F;
370 NO(1)=CVI(F1$) : NO(2)=CVI(F2$)
375 NO(3)=CVI(F3$) : NO(4)=CVI(F4$)
380 REM Nummering snelheden:
390 FOR I=1 TO 4 : FOR J=1 TO 2 : K=2*(I-1)+J
400 NR(K)=2*(NO(I)-1)+J : NEXT J : NEXT I
410 REM
420 REM Bulk elementen intellen:
430 FOR I=1 TO 8 : IG=NR(I)
440 FOR J=I TO 8 : JG=NR(J)
450 II=IG : IF JG<IG THEN II=JG
460 JJ=ABS(IG-JG)+1
470 S(II,JJ)=S(II,JJ)+E(I,J)
480 NEXT J : NEXT I
490 NEXT F : CLOSE #1 : PRINT
500 REM
510 PRINT "Randvoorwaarden ..."
520 OPEN "R",#1,"NLRBOUND.BIN",8
530 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
540 FOR F=1 TO LIMB : GET #1,F
550 MU=CVI(F1$) : KIND=CVI(F2$)
560 GOSUB 1780
570 REM Nummering snelheden:
580 NR(1)=2*MU-1 : NR(2)=2*MU
590 REM Elementen intellen:
600 FOR I=1 TO 2 : IG=NR(I)
610 FOR J=I TO 2 : JG=NR(J)
620 II=IG : IF JG<IG THEN II=JG
630 JJ=ABS(IG-JG)+1
640 S(II,JJ)=S(II,JJ)+E(I,J)
650 NEXT J
660 B(IG)=B(IG)+R(I)
670 NEXT I
680 NEXT F : CLOSE #1 : REM Einde assemblage
690 REM
700 GOSUB 1980 : REM Vergelijkingen oplossen
710 REM
720 OPEN "R",#1,"NLRVELOC.BIN",8
730 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
740 FOR K=1 TO LIMC

```

```

750 LSET F1$=MKS$(B(2*K-1)) : LSET F2$=MKS$(B(2*K))
760 REM LPRINT B(2*K-1),B(2*K)
770 PUT #1,K : NEXT K : CLOSE #1
780 END
790 REM =====
800 REM Eindige elementen matrices
810 REM =====
820 REM Maak element schoon:
830 FOR I=1 TO 8 : FOR J=1 TO 8 : E(I,J)=0 : NEXT J : NEXT I
910 NG(1,1)=1 : NG(2,1)=2 : NG(3,1)=4
920 NG(1,2)=2 : NG(2,2)=3 : NG(3,2)=4
930 FOR IE=1 TO 2
940 REM ... Geometrie ...
950 NO1=NO(NG(1,IE)) : NO2=NO(NG(2,IE)) : NO3=NO(NG(3,IE))
960 X21=X(NO2)-X(NO1) : Y21=Y(NO2)-Y(NO1)
970 X32=X(NO3)-X(NO2) : Y32=Y(NO3)-Y(NO2)
980 X13=X(NO1)-X(NO3) : Y13=Y(NO1)-Y(NO3)
990 GOSUB 1230 : NEXT IE : RETURN
1190 REM -----
1200 REM Eindige Differentie benadering
1210 REM -----
1220 REM ... Onsamendrukbaar ...
1230 A(1)=-Y32 : A(2)=+X32 : A(3)=-Y13
1235 A(4)=+X13 : A(5)=-Y21 : A(6)=+X21
1240 GOSUB 1580 : REM Voeg toe aan element ...
1250 REM ... Rotatievrij ...
1260 A(1)=+X32 : A(2)=+Y32 : A(3)=+X13
1265 A(4)=+Y13 : A(5)=+X21 : A(6)=+Y21
1270 GOSUB 1580 : REM Voeg toe aan element ...
1280 RETURN
1560 REM -----
1570 REM Kleinste Kwadraten element
1580 REM -----
1590 REM SpoorWegen:
1600 SUM=0 : FOR I=1 TO 6 : SUM=SUM+A(I)*A(I)
1605 NEXT I : SUM=1/SUM
1610 REM Eindig element:
1620 FOR I=1 TO 3 : FOR K=1 TO 2
1630 IH=2*(I-1)+K : IG=2*(NG(I,IE)-1)+K
1640 FOR J=1 TO 3 : FOR L=1 TO 2
1650 JH=2*(J-1)+L : JG=2*(NG(J,IE)-1)+L
1660 E(IG,JG)=E(IG,JG)+A(IH)*A(JH)*SUM

```



```

1670 NEXT L : NEXT J : NEXT K : NEXT I
1680 RETURN
1760 REM =====
1770 REM Randvoorwaarden
1780 REM =====
1790 FOR I=1 TO 2 : R(I)=0 : FOR J=1 TO 2
1795 E(I,J)=0 : NEXT J : NEXT I
1800 REM
1810 ON KIND GOTO 1840,1870,1920
1820 REM
1830 REM ... V = 0 ...
1840 E(2,2)=1 : RETURN
1850 REM
1860 REM ... X.U + Y.V = 0 ...
1870 X1=X(MU) : Y1=Y(MU) : SUM=X1*X1+Y1*Y1
1880 E(1,1)=X1*X1/SUM : E(2,2)=Y1*Y1/SUM
1890 E(1,2)=X1*Y1/SUM : E(2,1)=X1*Y1/SUM
1900 RETURN
1910 REM ... U = 1 ...
1920 E(1,1)=1 : R(1)=1 : RETURN
1930 REM
1940 REM =====
1950 REM Oplossen van linear stelsel vergelijkingen
1960 REM Positief definitie symmetrische bandmatrix
1970 REM =====
1980 IF NN<2 THEN PRINT "GAUSS: NN=";NN : END
1990 IF NB1<2 THEN PRINT "GAUSS: NB1=";NB1 : END
2000 REM
2010 PRINT "Vegen voor";NN;"vergelijkingen ..."
2020 II=NN-1 : KK=NB1-1
2030 FOR I=1 TO II : DIAG=S(I,1) : PRINT I;
2040 IF DIAG=0 THEN PRINT "Nul op diagonaal" : END
2050 IF I>NN-NB1 THEN KK=NN-I
2060 FOR K=1 TO KK
2070 PIVOT=S(I,K+1)/DIAG : IF PIVOT=0 THEN GOTO 2100
2080 B(I+K)=B(I+K)-PIVOT*B(I) : JJ=KK-K+1
2090 FOR J=1 TO JJ : S(I+K,J)=S(I+K,J)-PIVOT*S(I,K+J) : NEXT J
2100 NEXT K : NEXT I
2110 PRINT "Terugsubstitutie ..."
2120 KK=NB1-1 : FOR N=2 TO NN : I=NN-N+2 : PRINT I;
2130 B(I)=B(I)/S(I,1) : IF I<NB1 THEN KK=I-1
2140 FOR K=1 TO KK : B(I-K)=B(I-K)-B(I)*S(I-K,K+1) : NEXT K

```

```

2150 NEXT N : B(1)=B(1)/S(1,1) : RETURN
2160 REM

10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
50 REM MESH PLOT
60 REM -----
100 REM Algemeen ...
110 OPEN "R",#1,"NLRGENER.BIN",16
120 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
130 GET #1,1 : LIMC=CVI(F1$) : LIMT=CVI(F2$)
140 CLOSE #1
150 DIM X(LIMC),Y(LIMC)
160 REM Coördinaten ...
170 OPEN "R",#1,"NLRCOORD.BIN",8
180 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
190 FOR I=1 TO LIMC : GET #1,I
200 X(I)=CVS(F1$) : Y(I)=CVS(F2$)
210 REM PRINT X(I),Y(I)
220 NEXT I : CLOSE #1
230 REM
240 REM Plot mesh ...
250 SCREEN 2 : DIM NR(4)
260 OPEN "R",#1,"NLRTOPOL.BIN",16
270 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
280 FOR I=1 TO LIMT : GET #1,I
290 NR(1)=CVI(F1$) : NR(2)=CVI(F2$)
295 NR(3)=CVI(F3$) : NR(4)=CVI(F4$)
300 FOR M=1 TO 4 : L=(M MOD 4)+1
310 X1=40*X(NR(M)) : Y1=190-20*Y(NR(M))
320 X2=40*X(NR(L)) : Y2=190-20*Y(NR(L))
330 LINE (X1,Y1)-(X2,Y2)
340 NEXT M : NEXT I : CLOSE #1
350 REM
360 REM Vectorplot snelheden ...
380 OPEN "R",#2,"NLRVELOC.BIN",8
400 FIELD #2, 4 AS FU$, 4 AS FV$
410 FOR I=1 TO LIMC : GET #2,I
420 UU=CVS(FU$) : VV=CVS(FV$)
430 X1=40*X(I) : Y1=190-20*Y(I)
440 X2=X1+40*UU : Y2=Y1-20*VV : LINE (X1,Y1)-(X2,Y2)
450 NEXT I

```

```

460 END

10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
50 REM CYLINDER SNELHEIDS PROFIEL
60 REM -----
80 REM Algemeen ...
90 OPEN "R",#1,"NLRGENER.BIN",16
100 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
110 GET #1,1 : NPH=CVI(F4$)
120 CLOSE #1
130 DIM X(NPH),Y(NPH),U(NPH),V(NPH)
140 REM Coördinaten ...
150 OPEN "R",#1,"NLRCOORD.BIN",8
160 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
170 FOR I=1 TO NPH : GET #1,I
180 X(I)=CVS(F1$) : Y(I)=CVS(F2$)
190 NEXT I : CLOSE #1
200 REM
210 XO=10 : YO=150 : SX=200 : SY=50 : SCREEN 2
220 LINE (XO,YO-SY)-(XO+SX,YO-SY) : LINE (XO,YO)-(XO,YO-4*SY)
230 REM
240 REM Plot snelheden ...
250 OPEN "R",#1,"NLRVELOC.BIN",8
260 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
270 FOR I=1 TO NPH : GET #1,I
280 U(I)=CVS(F1$) : V(I)=CVS(F2$)
290 NEXT I : CLOSE #1
300 REM
310 XN=XO+SX*X(1) : YN=YO-SY
320 REM Horizontale component ...
330 FOR I=2 TO NPH
340 XM=XN : XN=XO+SX*X(I)
350 YM=YN : YN=YO-SY*(1+U(I))
360 LINE(XM,YM)-(XN,YN) : NEXT I
390 REM Verticale component ...
400 XN=XO+SX*X(1) : YN=YO-SY
410 FOR I=2 TO NPH
420 XM=XN : XN=XO+SX*X(I)
430 YM=YN : YN=YO-SY*(1+V(I))
440 LINE(XM,YM)-(XN,YN) : NEXT I
460 REM

```

```

470 REM Analytische oplossing ...
480 LIMIT=25
490 XN=0 : YN=Y0-SY
500 FOR I=1 TO LIMIT
510 PHI=2*ATN(1)/(LIMIT-1)*(I-1)
520 UU=1-COS(2*PHI)
530 XM=XN : XN=X0+COS(PHI)*SX
540 YM=YN : YN=Y0-SY*(1+UU)
550 LINE(XM,YM)-(XN,YN) : NEXT I
560 XN=0 : YN=Y0-SY
570 FOR I=1 TO LIMIT
580 PHI=2*ATN(1)/(LIMIT-1)*(I-1)
590 VV=-SIN(2*PHI)
600 XM=XN : XN=X0+COS(PHI)*SX
610 YM=YN : YN=Y0-SY*(1+VV)
620 LINE(XM,YM)-(XN,YN) : NEXT I
630 END

```

A.8 BASIC HdB

```

10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
50 REM MESH GENERATOR
60 REM -----
130 INPUT "Aantal rasterlijnen in radiale richting (7) : ",NDR
140 INPUT "Aantal rasterlijnen in omtreks-richting (5) : ",NPH
150 IF NDR<=0 THEN NDR=7
160 IF NPH<=0 THEN NPH=5
170 REM
180 REM ... Initialisatie ...
190 LIMC=NDR*NPH : REM aantal rasterpunten
193 LIMT=(NDR-1)*(NPH-1) : REM aantal elementen
197 LIMV=NDR*(NPH-1)+NPH*(NDR-1) : REM aantal knooppunten
200 DIM NOV(LIMV,2) : DIM MAV(LIMC,2) : REM Snelheden
210 LIMB=2*(NDR-1)+2*(NPH-1) : REM aantal randpunten
220 REM
230 PRINT "Algemene gegevens ..."
240 OPEN "R",#1,"HDBGENER.BIN",20
250 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$, 4 AS F5$
260 LSET F1$=MKI$(LIMC) : LSET F2$=MKI$(LIMT)
265 LSET F3$=MKI$(LIMV)

```

```

270 LSET F4$=MKI$(LIMB) : LSET F5$=MKI$(NPH)
280 PUT #1,1 : CLOSE #1
290 REM
300 PRINT "Coordinaten ..."
310 OPEN "R",#1,"HDBCkoord.BIN",8
320 FIELD #1, 4 AS X$, 4 AS Y$
330 PI=4*ATN(1) : DPHI=.5*PI/(NPH-1)
340 R=10 : P=R^(1/(NDR-1))-1 : REM Laatste radiale meshlijn
350 FOR I=1 TO NDR
360 R=(1+P)^(I-1) : REM Leidt tot equivalente elementen
370 FOR J=1 TO NPH
380 PHI=(J-1)*DPHI : K=(I-1)*NPH+J
390 X=R*COS(PHI) : Y=R*SIN(PHI)
400 LSET X$=MKS$(X) : LSET Y$=MKS$(Y)
410 PUT #1,K : NEXT J : NEXT I
420 CLOSE #1
430 REM
440 PRINT "Topologie ..."
450 OPEN "R",#1,"HDBTOPOL.BIN",16
460 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2Y$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
470 FOR I=1 TO NDR-1 : FOR J=1 TO NPH-1
480 K=(I-1)*(NPH-1)+J
490 KON2=(I-1)*NPH+J : KON1=(I-1)*NPH+J+1
500 KON3=I*NPH+J : KON4=I*NPH+J+1
510 REM PRINT KON1,KON2,KON3,KON4
520 LSET F1$=MKI$(KON1) : LSET F2$=MKI$(KON2)
530 LSET F3$=MKI$(KON3) : LSET F4$=MKI$(KON4)
540 PUT #1,K : NEXT J : NEXT I
550 CLOSE #1
560 REM
570 PRINT "Onbekenden ..."
580 FOR I=1 TO NDR : FOR J=1 TO NPH-1
590 NR1=(I-1)*NPH+J : NR2=(I-1)*NPH+J+1
600 K=(2*NPH-1)*(I-1)+J : NOV(K,1)=NR1 : NOV(K,2)=NR2
610 REM PRINT K,NOV(K,1),NOV(K,2)
620 NEXT J : NEXT I
630 FOR I=1 TO NDR-1 : FOR J=1 TO NPH
640 NR1=(I-1)*NPH+J : NR2=I*NPH+J
650 K=(2*NPH-1)*I+J-NPH : NOV(K,1)=NR1 : NOV(K,2)=NR2
660 REM PRINT K,NOV(K,1),NOV(K,2)
670 NEXT J : NEXT I
680 REM

```

```

690 FOR K=1 TO LIMV
700 I=NOV(K,1) : J=NOV(K,2)
710 II=I : IF J<I THEN II=J
720 JJ=ABS(I-J) : IF JJ>2 THEN JJ=2
730 MAV(II,JJ)=K : NEXT K
740 REM
750 OPEN "R",#1,"HDBUNKNO.BIN",8
760 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
770 FOR I=1 TO LIMV
780 LSET F1$=MKI$(NOV(I,1)) : LSET F2$=MKI$(NOV(I,2))
790 PUT #1,I : NEXT I
800 FOR I=1 TO LIMC
810 LSET F1$=MKI$(MAV(I,1)) : LSET F2$=MKI$(MAV(I,2))
820 PUT #1,I+LIMV : NEXT I
830 CLOSE #1
840 PRINT "Randvoorwaarden ..."
850 OPEN "R",#1,"HDBBOUND.BIN",12
860 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2Y$, 4 AS F3$
870 FOR I=1 TO NDR-1 : REM ... Instroming ...
880 NOB1=I*NPH : NOB2=(I+1)*NPH : NOB3=1
890 REM PRINT NOB1,NOB2,NOB3
900 LSET F1$=MKI$(NOB1) : LSET F2$=MKI$(NOB2)
905 LSET F3$=MKI$(NOB3)
910 PUT #1,I : NEXT I : L=NDR-1
920 FOR I=1 TO NPH-1 : REM ... Cirkel ...
930 NOB1=I : NOB2=I+1 : NOB3=2
940 REM PRINT NOB1,NOB2,NOB3
950 LSET F1$=MKI$(NOB1) : LSET F2$=MKI$(NOB2)
955 LSET F3$=MKI$(NOB3)
960 PUT #1,I+L : NEXT I : L=L+NPH-1
970 FOR I=1 TO NDR-1 : REM ... Symmetrie ...
980 NOB1=NPH*(I-1)+1 : NOB2=NPH*I+1 : NOB3=1
990 REM PRINT NOB1,NOB2,NOB3
1000 LSET F1$=MKI$(NOB1) : LSET F2$=MKI$(NOB2)
1005 LSET F3$=MKI$(NOB3)
1010 PUT #1,I+L : NEXT I : L=L+NDR-1
1020 FOR I=1 TO NPH-1 : REM ... Uitstroming ...
1030 NOB1=NPH*(NDR-1)+I : NOB2=NPH*(NDR-1)+I+1 : NOB3=3
1040 REM PRINT NOB1,NOB2,NOB3
1050 LSET F1$=MKI$(NOB1) : LSET F2$=MKI$(NOB2)
1055 LSET F3$=MKI$(NOB3)
1060 PUT #1,I+L : NEXT I : L=L+NPH-1 : CLOSE #1

```

1070 END

```
10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
30 REM HOOFDPROGRAMMA
40 REM -----
45 PRINT "Gegevens inlezen ..."
100 OPEN "R",#1,"HDBGENER.BIN",20
110 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$, 4 AS F5$
120 GET #1,1 : LIMC=CVI(F1$) : LIMT=CVI(F2$)
125 LIMV=CVI(F3$) : LIMB=CVI(F4$)
130 NPH=CVI(F5$)
140 CLOSE #1 : NN=2*LIMV : NB1=4*NPH
150 REM
160 DIM X(LIMC),Y(LIMC),MAV(LIMC,2),S(NN,NB1),B(NN)
170 REM
180 REM Coördinaten:
190 OPEN "R",#1,"HDBCOORD.BIN",8
200 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
210 FOR I=1 TO LIMC : GET #1,I
220 X(I)=CVS(F1$) : Y(I)=CVS(F2$)
230 NEXT I : CLOSE #1
240 REM
250 REM Nummering onbekenden:
260 OPEN "R",#1,"HDBUNKNO.BIN",8
270 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
280 FOR I=1 TO LIMC : GET #1,I+LIMV
290 MAV(I,1)=CVI(F1$) : MAV(I,2)=CVI(F2$)
300 NEXT I : CLOSE #1
305 REM
320 REM Grote matrix en vector schooonmaken:
330 FOR I=1 TO NN : FOR J=1 TO NB1 : S(I,J)=0
335 NEXT J : B(I)=0 : NEXT I
340 REM
350 DIM NO(4),E(8,8),R(2),NR(8),A(8)
490 OPEN "R",#1,"HDBTOPOL.BIN",16
500 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$ : GET #1,1
510 NO(1)=CVI(F1$) : NO(2)=CVI(F2$)
515 NO(3)=CVI(F3$) : NO(4)=CVI(F4$)
520 PRINT "Repeteerbaar element ..." : GOSUB 1060
530 REM
540 PRINT "Assemblage procedure voor";LIMT;"elementen ..."
```

```

550 FOR F=1 TO LIMT : GET #1,F : PRINT F;
560 NO(1)=CVI(F1$) : NO(2)=CVI(F2$)
565 NO(3)=CVI(F3$) : NO(4)=CVI(F4$)
570 REM
580 REM Snelheids-nummering:
590 FOR K=1 TO 4 : L=(K MOD 4)+1
600 II=NO(K) : IF NO(L)<NO(K) THEN II=NO(L)
610 JJ=ABS(NO(K)-NO(L)) : IF JJ>2 THEN JJ=2
620 IJ=MAV(II,JJ) : NR(2*K-1)=2*IJ-1 : NR(2*K)=2*IJ
630 NEXT K
640 REM Element intellen:
650 FOR I=1 TO 8 : IG=NR(I)
660 FOR J=I TO 8 : JG=NR(J)
670 II=IG : IF JG<IG THEN II=JG
680 JJ=ABS(IG-JG)+1
690 S(II,JJ)=S(II,JJ)+E(I,J)
700 NEXT J : NEXT I
710 NEXT F : CLOSE #1 : PRINT : REM Einde bulk.
720 REM
730 PRINT "Randvoorwaarden ..."
740 OPEN "R",#1,"HDBBOUND.BIN",12
750 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$
760 FOR F=1 TO LIMB : GET #1,F
770 MU=CVI(F1$) : NU=CVI(F2$) : KIND=CVI(F3$)
780 GOSUB 1970
790 REM Snelheids-nummering:
800 II=MU : IF NU<MU THEN II=NU
810 JJ=ABS(MU-NU) : IF JJ>2 THEN JJ=2
820 IJ=MAV(II,JJ) : NR(1)=2*IJ-1 : NR(2)=2*IJ
830 FOR I=1 TO 2 : IG=NR(I)
840 FOR J=I TO 2 : JG=NR(J)
850 II=IG : IF JG<IG THEN II=JG
860 JJ=ABS(IG-JG)+1
870 S(II,JJ)=S(II,JJ)+E(I,J)
880 NEXT J
890 B(IG)=B(IG)+R(I)
900 NEXT I
910 NEXT F : CLOSE #1 : REM Einde totale assemblage.
920 REM
930 GOSUB 2180 : REM Los de vergelijkingen op ...
940 REM
950 OPEN "R",#1,"HDBVELOC.BIN",8

```



```

960 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
970 FOR K=1 TO LIMV
980 LSET F1$=MKS$(B(2*K-1)) : LSET F2$=MKS$(B(2*K))
990 REM LPRINT B(2*K-1),B(2*K)
1000 PUT #1,K : NEXT K : CLOSE #1
1010 END
1020 REM =====
1030 REM   Eindige Elementen Matrix
1040 REM =====
1050 REM Maak schoon:
1060 FOR I=1 TO 8 : FOR J=1 TO 8 : E(I,J)=0 : NEXT J : NEXT I
1070 REM Lokaliseer gegevens:
1080 X1=X(NO(1)) : X2=X(NO(2)) : X3=X(NO(3)) : X4=X(NO(4))
1090 Y1=Y(NO(1)) : Y2=Y(NO(2)) : Y3=Y(NO(3)) : Y4=Y(NO(4))
1100 X21=X2-X1 : X32=X3-X2 : X43=X4-X3 : X14=X1-X4
1110 Y21=Y2-Y1 : Y32=Y3-Y2 : Y43=Y4-Y3 : Y14=Y1-Y4
1120 REM Onsamendrukbaar:
1130 A(1)=-Y21 : A(3)=-Y32 : A(5)=-Y43 : A(7)=-Y14
1140 A(2)=+X21 : A(4)=+X32 : A(6)=+X43 : A(8)=+X14
1150 GOSUB 1900 : REM Voeg toe aan element ...
1160 REM Rotatievrij:
1170 A(1)=+X21 : A(3)=+X32 : A(5)=+X43 : A(7)=+X14
1180 A(2)=+Y21 : A(4)=+Y32 : A(6)=+Y43 : A(8)=+Y14
1190 GOSUB 1900 : REM Voeg toe aan element ...
1200 REM Isoparametriek:
1210 A(1)=+1 : A(2)=0 : A(3)=-1 : A(4)=0
1215 A(5)=+1 : A(6)=0 : A(7)=-1 : A(8)=0
1220 GOSUB 1900 : REM Voeg toe aan element ...
1230 A(1)=0 : A(2)=+1 : A(3)=0 : A(4)=-1
1235 A(5)=0 : A(6)=+1 : A(7)=0 : A(8)=-1
1240 GOSUB 1900 : REM Voeg toe aan element ...
1250 RETURN
1260 REM -----
1270 REM Voeg toe aan element
1280 REM -----
1290 REM Spoorwegen:
1300 SUM=0 : FOR I=1 TO 8 : SUM=SUM+A(I)*A(I)
1305 NEXT I : SUM=1/SUM
1305 REM Kleinste kwadraten methode:
1310 FOR I=1 TO 8 : FOR J=1 TO 8
1320 E(I,J)=E(I,J)+A(I)*A(J)*SUM
1330 NEXT J : NEXT I

```

```

1940 RETURN
1950 REM =====
1960 REM Randvoorwaarden
1970 REM =====
1980 FOR I=1 TO 2 : R(I)=0 : FOR J=1 TO 2 : E(I,J)=0
1985 NEXT J : NEXT I
1990 REM
2000 ON KIND GOTO 2030,2060,2120
2010 REM
2020 REM ... V = 0 ...
2030 E(2,2)=1 : RETURN
2040 REM
2050 REM ... Y.U - X.V = 0 ...
2060 X21=X(NU)-X(MU) : Y21=Y(NU)-Y(MU)
2070 SUM=X21*X21+Y21*Y21
2080 E(1,1)=Y21*Y21/SUM : E(2,2)=X21*X21/SUM
2090 E(1,2)=-X21*Y21/SUM : E(2,1)=-X21*Y21/SUM
2100 RETURN
2110 REM ... U = 1 ...
2120 E(1,1)=1 : R(1)=1 : RETURN
2130 REM
2140 REM =====
2150 REM OPLOSSEN VAN LINEAIRE VERGELIJKINGEN VOOR
2160 REM POSITIEF DEFINIETE SYMMETRISCHE BAND MATRICES
2170 REM =====
2180 IF NN<2 THEN PRINT "GAUSS: NN=";NN : END
2190 IF NB1<2 THEN PRINT "GAUSS: NB1=";NB1 : END
2200 REM
2210 PRINT "Vegen voor";NN;"vergelijkingen ..."
2220 II=NN-1 : KK=NB1-1
2230 FOR I=1 TO II : DIAG=S(I,1) : PRINT I;
2240 IF DIAG=0 THEN PRINT "Nul op de diagonaal" : END
2250 IF I>NN-NB1 THEN KK=NN-I
2260 FOR K=1 TO KK
2270 PIVOT=S(I,K+1)/DIAG : IF PIVOT=0 THEN GOTO 2300
2280 B(I+K)=B(I+K)-PIVOT*B(I) : JJ=KK-K+1
2290 FOR J=1 TO JJ : S(I+K,J)=S(I+K,J)-PIVOT*S(I,K+J) : NEXT J
2300 NEXT K : NEXT I
2310 PRINT "Terugsubstitutie ..."
2320 KK=NB1-1 : FOR N=2 TO NN : I=NN-N+2 : PRINT I;
2330 B(I)=B(I)/S(I,1) : IF I<NB1 THEN KK=I-1
2340 FOR K=1 TO KK : B(I-K)=B(I-K)-B(I)*S(I-K,K+1) : NEXT K

```

```

2350 NEXT N : B(1)=B(1)/S(1,1) : RETURN
2360 REM

10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
50 REM Plot mesh & snelheden
60 REM -----
100 REM Algemeen ...
110 OPEN "R",#1,"HDBGENER.BIN",20
120 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$, 4 AS F5$
130 GET #1,1 : LIMC=CVI(F1$) : LIMT=CVI(F2$) : LIMV=CVI(F3$)
140 CLOSE #1
150 DIM X(LIMC),Y(LIMC)
160 REM Coördinaten ...
170 OPEN "R",#1,"HDBCOORD.BIN",8
180 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
190 FOR I=1 TO LIMC : GET #1,I
200 X(I)=CVS(F1$) : Y(I)=CVS(F2$)
210 REM PRINT X(I),Y(I)
220 NEXT I : CLOSE #1
230 REM
240 REM Plot mesh ...
250 SCREEN 2 : DIM NR(4)
260 OPEN "R",#1,"HDBTOPOL.BIN",16
270 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
280 FOR I=1 TO LIMT : GET #1,I
290 NR(1)=CVI(F1$) : NR(2)=CVI(F2$)
295 NR(3)=CVI(F3$) : NR(4)=CVI(F4$)
300 FOR M=1 TO 4 : L=(M MOD 4)+1
310 X1=40*X(NR(M)) : Y1=190-20*Y(NR(M))
320 X2=40*X(NR(L)) : Y2=190-20*Y(NR(L))
330 LINE (X1,Y1)-(X2,Y2)
340 NEXT M : NEXT I : CLOSE #1
350 REM
360 REM Vectorplot snelheden ...
370 OPEN "R",#1,"HDBUNKNO.BIN",8
380 OPEN "R",#2,"HDBVELOC.BIN",8
390 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
400 FIELD #2, 4 AS FU$, 4 AS FV$
410 FOR I=1 TO LIMV : GET #1,I : GET #2,I
420 N1=CVI(F1$) : N2=CVI(F2$) : UU=CVS(FU$) : VV=CVS(FV$)
430 X1=40*.5*(X(N1)+X(N2)) : Y1=190-20*.5*(Y(N1)+Y(N2))

```

```

440 X2=X1+40*UU : Y2=Y1-20*VV : LINE (X1,Y1)-(X2,Y2)
450 NEXT I : CLOSE #1 : CLOSE #2
460 END

10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
50 REM Snelheidsprofiel cylinder
60 REM -----
80 REM Algemeen:
90 OPEN "R",#1,"HDBGENER.BIN",20
100 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$, 4 AS F5$
110 GET #1,1 : NPH=CVI(F5$)
120 CLOSE #1
130 DIM X(NPH+1),Y(NPH+1)
140 REM Coördinaten:
150 OPEN "R",#1,"HDBCOORD.BIN",8
160 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
170 FOR I=1 TO NPH+1 : GET #1,I
180 X(I)=CVS(F1$) : Y(I)=CVS(F2$)
190 NEXT I : CLOSE #1
200 REM
210 XO=10 : YO=150 : SX=200 : SY=50 : SCREEN 2
220 LINE (XO,YO-SY)-(XO+SX,YO-SY) : LINE (XO,YO)-(XO,YO-4*SY)
230 REM
240 REM Plot snelheden:
250 OPEN "R",#1,"HDBVELOC.BIN",8
260 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
270 FOR I=1 TO NPH : GET #1,I
280 U(I)=CVS(F1$) : V(I)=CVS(F2$)
290 NEXT I : CLOSE #1
300 REM
310 XN=XO+SX*X(1) : YN=YO-SY
320 REM Horizontale component:
330 FOR I=1 TO NPH-1
340 XM=XN : XN=XO+SX*.5*(X(I)+X(I+1))
350 YM=YN : YN=YO-SY*(1+U(I))
360 LINE(XM,YM)-(XN,YN) : NEXT I
370 LINE(XN,YN)-(XO+SX*X(NPH),YO-SY*(1+2))
380 XN=XO+SX*X(1) : YN=YO-SY
390 REM Verticale component:
400 XN=XO+SX*X(1) : YN=YO-SY
410 FOR I=1 TO NPH-1

```

```

420 XM=XN : XN=X0+SX*.5*(X(I)+X(I+1))
430 YM=YN : YN=Y0-SY*(1+V(I))
440 LINE(XM,YM)-(XN,YN) : NEXT I
450 LINE(XN,YN)-(X0+SX*X(NPH),Y0-SY)
460 REM
470 REM Analytische oplossingen:
480 LIMIT=25
490 XN=0 : YN=Y0-SY
500 FOR I=1 TO LIMIT
510 PHI=2*ATN(1)/(LIMIT-1)*(I-1)
520 UU=1-COS(2*PHI)
530 XM=XN : XN=X0+COS(PHI)*SX
540 YM=YN : YN=Y0-SY*(1+UU)
550 LINE(XM,YM)-(XN,YN) : NEXT I
560 XN=0 : YN=Y0-SY
570 FOR I=1 TO LIMIT
580 PHI=2*ATN(1)/(LIMIT-1)*(I-1)
590 VV=-SIN(2*PHI)
600 XM=XN : XN=X0+COS(PHI)*SX
610 YM=YN : YN=Y0-SY*(1+VV)
620 LINE(XM,YM)-(XN,YN) : NEXT I
630 END

10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
50 REM Stroomfunctie berekenen
60 REM -----
90 OPEN "R",#1,"HDBGENER.BIN",20 : REM Algemeen
100 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$, 4 AS F5$
110 GET #1,1 : CLOSE #1
120 LIMC=CVI(F1$) : LIMV=CVI(F3$) : NPH=CVI(F5$)
130 NN=LIMC : NB1=NPH+1
140 REM
150 DIM X(LIMC),Y(LIMC),S(NN,NB1),B(NN)
160 REM
170 REM Coördinaten ...
180 OPEN "R",#1,"HDBCOORD.BIN",8
190 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
200 FOR I=1 TO LIMC : GET #1,I
210 X(I)=CVS(F1$) : Y(I)=CVS(F2$)
220 NEXT I : CLOSE #1
230 REM

```

```

240 PRINT "Assemblage procedure voor";LIMV;"elementen ..."
250 REM
260 DIM NR(2),E(2,2),R(2)
270 FOR I=1 TO NN : FOR J=1 TO NB1 : S(I,J)=0
275 NEXT J : B(I)=0 : NEXT I
280 REM
290 OPEN "R",#1,"HDBUNKNO.BIN",8
295 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
300 OPEN "R",#2,"HDBVELOC.BIN",8
305 FIELD #2, 4 AS FU$, 4 AS FV$
310 FOR F=1 TO LIMV : GET #1,F : GET #2,F : PRINT F;
320 NR(1)=CVI(F1$) : NR(2)=CVI(F2$)
325 U=CVS(FU$) : V=CVS(FV$)
330 REM
340 GOSUB 600 : REM Element matrix ...
350 REM
360 FOR I=1 TO 2 : IG=NR(I)
370 FOR J=I TO 2 : JG=NR(J)
380 II=IG : IF JG<IG THEN II=JG
390 JJ=ABS(IG-JG)+1
400 S(II,JJ)=S(II,JJ)+E(I,J)
410 NEXT J
420 B(IG)=B(IG)+R(I)
430 NEXT I
440 NEXT F : CLOSE #1 : PRINT
450 REM
460 REM Randvoorwaarde ...
470 S(NPH,1)=S(NPH,1)+10
480 REM
490 GOSUB 740 : REM Los vergelijkingen op ...
500 REM
510 OPEN "R",#1,"HDBPSI.BIN",4 : FIELD #1, 4 AS F1$
520 FOR K=1 TO LIMC
530 LSET F1$=MKS$(B(K)) : REM LPRINT B(K)
540 PUT #1,K : NEXT K : CLOSE #1
550 END
560 REM -----
570 REM Eindige Elementen Matrix
580 REM -----
590 REM Matrix schoonmaken:
600 FOR I=1 TO 2 : R(I)=0 : FOR J=1 TO 2 : E(I,J)=0
605 NEXT J : NEXT I

```

```

610 REM Differentie-schema:
620 X21=X(NR(2))-X(NR(1)) : Y21=Y(NR(2))-Y(NR(1))
630 A(1)=-1 : A(2)=+1 : W=Y21*U-X21*V
650 REM Kleinste kwadraten element:
660 FOR I=1 TO 2 : FOR J=I TO 2
670 E(I,J)=E(I,J)+A(I)*A(J)
680 NEXT J : R(I)=R(I)+A(I)*W : NEXT I
690 RETURN
700 REM -----
710 REM Oplossen van stelsel lineaire vergelijkingen
720 REM Positief definit symmetrische band matrices
730 REM -----
740 IF NN<2 THEN PRINT "GAUSS: NN=";NN : END
750 IF NB1<2 THEN PRINT "GAUSS: NB1=";NB1 : END
760 REM
770 PRINT "Vegen voor";NN;"vergelijkingen ..."
780 II=NN-1 : KK=NB1-1
790 FOR I=1 TO II : DIAG=S(I,1) : PRINT I;
800 IF DIAG=0 THEN PRINT "Nul op diagonaal" : END
810 IF I>NN-NB1 THEN KK=NN-I
820 FOR K=1 TO KK
830 PIVOT=S(I,K+1)/DIAG : IF PIVOT=0 THEN GOTO 860
840 B(I+K)=B(I+K)-PIVOT*B(I) : JJ=KK-K+1
850 FOR J=1 TO JJ : S(I+K,J)=S(I+K,J)-PIVOT*S(I,K+J) : NEXT J
860 NEXT K : NEXT I : PRINT
870 PRINT "Terugsubstitutie ..."
880 KK=NB1-1 : FOR N=2 TO NN : I=NN-N+2 : PRINT I;
890 B(I)=B(I)/S(I,1) : IF I<NB1 THEN KK=I-1
900 FOR K=1 TO KK : B(I-K)=B(I-K)-B(I)*S(I-K,K+1) : NEXT K
910 NEXT N : B(1)=B(1)/S(1,1) : PRINT : RETURN
920 REM

10 REM Probleem van Labrujere
20 REM =====
30 REM Contour plot van de stroom-functie (stroomlijnen)
40 REM -----
45 PRINT "Gegevens inlezen ..."
50 OPEN "R",#1,"HDBGENER.BIN",20
60 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$, 4 AS F5$
70 GET #1,1 : CLOSE #1 : LIMC=CVI(F1$) : LIMT=CVI(F2$)
90 DIM X(LIMC),Y(LIMC),B(LIMC)
110 REM

```

```

190 REM Coordinaten ...
200 OPEN "R",#1,"HDBCOORD.BIN",8
205 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$
210 FOR I=1 TO LIMC
220 GET #1,I : X(I)=CVS(F1$) : Y(I)=CVS(F2$)
230 NEXT I : CLOSE #1
240 REM
250 REM Oplossing ...
260 OPEN "R",#1,"HDBPSI.BIN",4 : FIELD #1, 4 AS F1$
270 FOR I=1 TO LIMC : GET #1,I : B(I)=CVS(F1$) : NEXT I
280 CLOSE #1
290 BOT=B(1) : TOP=B(1) : FOR I=2 TO LIMC
300 IF TOP<B(I) THEN TOP=B(I)
310 IF BOT>B(I) THEN BOT=B(I)
320 NEXT I
325 PRINT "Voorbereiding ..."
330 DIM ND(3,4)
332 DATA 1,2,3 , 1,2,4 , 4,3,1 , 4,3,2
334 FOR J=1 TO 4 : FOR I=1 TO 3 : READ ND(I,J)
335 NEXT I : NEXT J
336 DIM NR(4),XQ(4),YQ(4),ZQ(4),XD(3),YD(3),ZD(3),FD(3)
340 DIM NP(3,6),MUST(27),MOVE(27),R(6),NUM(3),NO(3)
350 GOSUB 1000
355 REM Doorloop mesh ...
360 SCREEN 2 : MOST=32 : N=MOST : GOSUB 920
370 OPEN "R",#1,"HDBTOPOL.BIN",16
380 FIELD #1, 4 AS F1$, 4 AS F2$, 4 AS F3$, 4 AS F4$
390 FOR F=1 TO LIMT : GET #1,F
400 NR(1)=CVI(F1$) : NR(2)=CVI(F2$)
405 NR(3)=CVI(F3$) : NR(4)=CVI(F4$)
410 FOR K=1 TO 4 : L=NR(K)
420 XQ(K)=X(L) : YQ(K)=Y(L) : ZQ(K)=(B(L)-BOT)/(TOP-BOT)
430 NEXT K
435 REM Vierhoeken:
440 QMIN=1 : QMAX=0
450 FOR K=1 TO 4 : REM Extrema:
460 IF ZQ(K)<QMIN THEN QMIN=ZQ(K)
470 IF ZQ(K)>QMAX THEN QMAX=ZQ(K)
480 NEXT K : REM Niets overbodigs:
490 Q=QMIN : GOSUB 800 : NQ1=N1
500 Q=QMAX : GOSUB 800 : NQ2=N2
505 REM

```



```

510 REM Doorloop driehoeken:
520 FOR D=1 TO 4 : FOR N=1 TO 3
530 K=ND(N,D) : XD(N)=XQ(K) : YD(N)=YQ(K) : ZD(N)=ZQ(K)
540 NEXT N
550 REM Doorloop niveaus:
560 FOR N=NQ1 TO NQ2 : ZERO=N/MOST
570 REM Elementaire contouren:
580 GOSUB 2000 : NEXT N : NEXT D
590 NEXT F : CLOSE #1 : END
790 REM
800 REM Bepaal onder & boven-grenzen
810 REM -----
830 N1=0 : N2=MOST : M=MOST
840 FOR K=1 TO LOG2+1
850 M=M\2 : N1=N1+M : N2=N2-M
860 IF Q<=N1/MOST THEN N1=N1-M
870 IF Q>=N2/MOST THEN N2=N2+M
880 NEXT K : RETURN
890 REM
900 REM Bepaal 2-log van getal
910 REM -----
920 IF N<=0 THEN PRINT "LOG2: fout argument" : END
930 FOR K=1 TO 64
940 N=N\2 : LOG2=K-1 : IF N=0 THEN RETURN
950 NEXT K : PRINT "LOG2: draait rondjes" : END
1000 REM
1010 REM Initialiseer NP(3,6),MUST(27),MOVE(27)
1015 REM -----
1020 REM Aantal elementen = 3
1030 REM Aantal eigenschappen = 3
1050 REM Maak alle permutaties van (0,1,2):
1060 FOR L=1 TO 6 : N=3 : GOSUB 1330
1070 FOR J=1 TO 3 : NP(J,L)=R(J) : NEXT J
1075 NEXT L
1080 REM Equivalentie-klassen:
1090 N=0 : FOR L=1 TO 27 : IF MUST(L)<>0 THEN 1220
1100 N=N+1 : REM Decimalen (in 3-tallig stelsel):
1110 M=L-1 : FOR K=1 TO 3
1115 NUM(3-K+1)=M MOD 3 : M=M\3 : NEXT K
1120 FOR KEER=1 TO 2
1125 FOR I=1 TO 6 : REM Inverse permutatie:
1130 FOR J=1 TO 3 : NO(NP(J,I))=J : NEXT J

```

```

1140 M=0 : FOR J=1 TO 3 : M=M*3+NUM(NO(J))
1145 NEXT J : M=M+1
1150 REM Toekennen van equivalente elementen:
1160 IF MUST(M)=0 THEN MUST(M)=N : REM Klasse
1170 IF MOVE(M)=0 THEN MOVE(M)=I : REM Permutatie
1180 NEXT I : REM Alle cijfer-permutaties behandeld.
1200 FOR K=1 TO 3 : NUM(K)=(3-NUM(K)) MOD 3 : NEXT K
1205 M=0 : FOR J=1 TO 3 : M=M*3+NUM(NO(J))
1207 NEXT J : M=M+1 : IF MUST(M)<>0 THEN 1220
1210 NEXT KEER : REM < en > de tweede KEER verwisseld
1220 NEXT L : RETURN
1260 REM
1270 REM Permutaties van array R(N)
1280 REM -----
1290 REM L = volgnummer permutatie (invoer)
1300 REM N = aantal elementen van: (invoer)
1310 REM R = rij die de permutatie bevat (uitvoer)
1320 REM
1330 H=1 : FOR K=1 TO N : R(K)=K : H=H*K : NEXT K
1340 REM Welk item:
1350 FOR K=1 TO N : P=N-K+1 : H=H\P
1360 Q=((L-1)\H) MOD P)+1 : IF Q=1 THEN 1400
1370 REM Roteer data:
1380 S=R(K+Q-1) : FOR M=K+Q-1 TO K+1 STEP -1
1390 R(M)=R(M-1) : NEXT M : R(K)=S
1400 NEXT K : RETURN
2000 REM
2010 REM Contourlijnen in een driehoek
2020 REM -----
2030 REM Invoer : XD(3),YD(3),ZD(3),ZERO
2050 FOR K=1 TO 3 : FD(K)=ZD(K)-ZERO : NEXT K
2060 REM
2065 REM Coderen van elk geval:
2070 MORE=0 : FOR K=1 TO 3
2080 IF FD(K)=0 THEN MORE=MORE*3
2090 IF FD(K)<0 THEN MORE=MORE*3+1
2100 IF FD(K)>0 THEN MORE=MORE*3+2
2110 NEXT K : LABEL=MUST(MORE+1)
2115 IF LABEL=1 OR LABEL=3 OR LABEL=5 THEN RETURN
2120 REM
2130 REM Permutatie van (1,2,3):
2140 KEUS=MOVE(MORE+1)

```

```

2145 NP1=NP(1,KEUS) : NP2=NP(2,KEUS) : NP3=NP(3,KEUS)
2150 X1=XD(NP1) : X2=XD(NP2) : X3=XD(NP3)
2160 Y1=YD(NP1) : Y2=YD(NP2) : Y3=YD(NP3)
2170 F1=FD(NP1) : F2=FD(NP2) : F3=FD(NP3)
2180 REM
2195 REM Aktie:      1      2      3      4      5      6
2200 ON LABEL GOTO 2210,2230,2210,2270,2210,2330
2210 REM Niets doen: === , =<< , <<<
2220 RETURN
2230 REM Lijn door EEN zijde: ==<
2240 LINE (50*X1,190-20*Y1)-(50*X2,190-20*Y2)
2260 RETURN
2270 REM Lijn door EEN hoekpunt: =<>
2275 ONDER=1/(F2-F3)
2280 XC=(F2*X3-F3*X2)*ONDER
2290 YC=(F2*Y3-F3*Y2)*ONDER
2300 LINE (50*X1,190-20*Y1)-(50*XC,190-20*YC)
2320 RETURN
2330 REM Lijn door twee zijden: <<>
2335 ONDER=1/(F1-F3)
2340 XB=(F1*X3-F3*X1)*ONDER
2350 YB=(F1*Y3-F3*Y1)*ONDER
2355 ONDER=1/(F2-F3)
2360 XC=(F2*X3-F3*X2)*ONDER
2370 YC=(F2*Y3-F3*Y2)*ONDER
2380 LINE (50*XB,190-20*YB)-(50*XC,190-20*YC)
2400 RETURN

```

Referenties

- [0] Sefan Denaerde, "Buitenaardse Beschaving", Ankh-Hermes Deventer, 1976, ISBN 90 202 3254 1.
- [1] B.L. van der Waerden, "Ontwakende Wetenschap". Nederlandse vertaling van "Erwachende Wissenschaft", Birkhauser, Basel, 1968.
- [2] L.E.J. Brouwer, "Over de grondslagen der wiskunde", Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.
- [3] "Plato, Schrijver", teksten gekozen en vertaald door Gerard Koolschijn, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 1988, ISBN 90 351 0483 8 / 0466 8 , "De grot", bladzijde 185,186.
- [4] Isaac Newton (A. Koyre, I.B. Cohen), "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica", volume I en II, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1972 (origineel in 1726).
- [5] Pi  re Teilhard de Chardin, "Het Verschijnsel Mens", Aula, Het Spectrum 1971 (uit de handel). Nederlandse vertaling van "Le Phénomène Humain".
- [6] Robert Havemann, "Dialektiek zonder Dogma. Natuurwetenschappen contra communistische ideologie", Aula, Het Spectrum, 1966. Nederlandse vertaling van "Dialektik ohne Dogma".
- [7] David Bohm, "Causaliteit en Waarschijnlijkheid in de moderne Fysica", Aula, Het Spectrum, 1963. Nederlandse vertaling van "Causality and Chance in Modern Physics".
- [8] A. van de Beukel, "De dingen hebben hun geheim (gedachten over natuurkunde, mens en God)", vierde druk, Ten Have b.v., Baarn, 1990. ISBN 90 259 4453 1

- [9] Paul Davies, "Other Worlds (Space, Superspace and the Quantum Universe)", Melbourne, 1980, ISBN 0-460-04400-1.
- [10] Preston C. Hammer, "Standards and Mathematical Terminology", "Mind Pollution", deel van een persoonlijke correspondentie.
- [11] NAG Newsletter 1/88, The Numerical Algorithms Group Limited, 1988.
- [12] Nigel Calder, "Sleutel tot het heelal (nieuwe wegen in de moderne fysica)", Nederlandse vertaling van uitgave BBC Publications, London U.K., Uitgeverij Bosch & Keuning, Baarn, 1977. ISBN 90 246 6982 0
- [13] Han (J.G.M.) de Bruijn, "Grondslagen voor een Materialistische Wiskunde, een wiskunde gebaseerd op de materiële werkelijkheid", afstudeerverslag, Technische Hogeschool Eindhoven, 1973. Wellicht nog ergens in een archief.
- [14] Bruno Latour, "Wetenschap in Beweging", Uitgeverij Bert Bakker, 1988. Nederlandse vertaling van "Science in Action".
- [15] Gentzen G. / Szabo M.E. (red.), "The Collected Papers of Gerhard Gentzen", North Holland, Amsterdam, 1969.
- [16] Alonzo Church, "The Calculi of Lambda-Conversion", Annals of Mathematics Studies number 6, Princeton University Press, 1951.
- [17] H. Tennekes, "Hoe voorspelbaar is het weer?", Intermediair, 20e jaargang - 6 april 1984.
- [18] Benoit B. Mandelbrot, "The Fractal geometry of Nature", W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1982, ISBN 0-7167-1186-9, hoofdstuk I.
- [19] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands, "The Feynman Lectures on Physics", Volume II chapter "Electromagnetic Mass" & Volume III, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.
- [20] Léon Brillouin, "Relativity Reëxamined", Academic Press, 1970.
- [21] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii, "Quantum Electrodynamics", Course of Theoretical Physics, Pergamon Press, Oxford, 1967.
- [22] Frank H. Shu, "The Physical Universe. An Introduction to Astronomy", University Science Books, 1982.

- [23] Hans Stephani (John Stewart), "General Relativity (An introduction to the theory of the gravitational field)", Cambridge University Press, 1982, ISBN 0 521 24008 5.
- [24] Ad Lagendijk, "De arrogantie van de fysicus", Intermediair 25e jaargang 38 - 22 september 1989.
- [25] Stephen Hawking, "Het heelal", Nederlandse vertaling van "A brief history of time", Bert Bakker, Amsterdam, 1988.
- [26] Paul Groenenboom, "The construction of nucleon-nucleon potentials in the ${}^3S_1 - {}^3D_1$ state from the phase parameters and the structure of the trinucleon bound state", Academisch proefschrift, Vrije Universiteit te Amsterdam, 1979.
- [27] Karl Marx, "Het Kapitaal. Een kritische beschouwing over de economie. Deel I: Het Productieproces van het Kapitaal". W. de Haan - Bussum, 1972. ISBN 90 228 35073
Nederlandse vertaling van "Das Kapital. Kritik der politischen Oekonomie. Buch I: Der Produktionsprozess des Kapitals". Hoofdstukken 5 en 1.
- [28] A. Tarski & E. W. Beth, "Inleiding tot de Logica (en tot de methodenleer der deductieve wetenschappen)", Noord-Hollandische Uitgeversmaatschappij, Amsterdam, 1953. Nederlandse vertaling van "Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences".
- [29] Denis de Rougemont, "Denken met de Handen" (2e druk), Holland, Amsterdam, 1948. Nederlandse vertaling van "Penser avec les mains".
- [30] Alonzo Church, "Introduction to Mathematical Logic, Volume I", Princeton University Press, 1956.
- [31] S.T.M Ackermans / J.H. van Lint, "Algebra en Analyse", Academic Science, Den Haag, 1976.
- [32] Luc Steels, "Programmeren in LISP", Academic Service, den Haag, 1983.
- [33] Preston C. Hammer, "Advances in Mathematical Systems Theory", Pennsylvania State University Press, University Park, 1969.
- [34] Alfred Korzybski, "Science and Sanity", Lakeville U.S.A., 1958.
- [35] Paul Halmos, "Intuitive Verzamelingenleer", Aula, Het Spectrum, 1968. Nederlandse vertaling van "Naive Set Theory".

- [36] A.H. Whitehead / B. Russell, "Principia Mathematica", volume I, II en III, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1910 - 1913.
- [37] H. Graham Flegg, "Schakel-algebra", Prisma Technica 34, Het Spektrum, 1969. Nederlandse vertaling van "Boolean Algebra and its Application".
- [38] David Gries, "Compiler Construction for Digital Computers", John Wiley & Sons, 1971.
- [39] J.H. ter Bekke, "Database Ontwerp", H.E. Stenfert Kroese B.V., 1983, ISBN 90 207 1265 9.
- [40] George Spencer Brown, "Laws of Form", Julian Press, New York, 1972.
- [41] "Statistisch Compendium", collegediktaat nr.218, Technische Hogeschool Eindhoven (< 1974).
- [42] H. de Brui(j)n, "Least squares numerical analysis of the steady state and transient thermal hydraulic behaviour of L.M.F.B.R. heat exchangers", Colloquium Topics in Applied Numerical Analysis, CWI Syllabus 4, Amsterdam, 1984. Kettingreferenties via paragraaf 9.
- [43] S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Company U.S.A. 1980.
- [44] J.C. Rice & R.J. Schnipke, "A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows", "An equal order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes", beide artikelen in "Computer methods in applied mechanics and engineering", North Holland, 1985/86. Commercieel gerealiseerd als het pakket FLOTRAN.
- [45] O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", 3th edition, Mc.Graw-Hill U.K. 1977, ISBN 0-07-084072-5.
- [46] Spalding D.B., "A general purpose computer program for multi-dimensional one- and two-phase flow", Mathematics and computers in simulation, North Holland Press, vol. XXIII, pp 267-276, 1981. Commercieel gerealiseerd als het pakket PHOENICS.
- [47] William F. Ames, "Numerical Methods for Partial Differential Equations", second edition, Academic Press, 1977, ISBN 0-12-056760-1.
- [48] Z.J. Csendes, "A fortran program to generate finite difference formulas", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 9, 581-599 (1975).

- [49] Th.E. Labrujère, "DE "EINDIGE ELEMENTEN - KLEINSTE KWADRATEN" METHODE TOEGEPAST OP DE 2D INCOMPRESSIBELE STROMING OM EEN CIRKEL CYLINDER", Memorandum WD-76-030, Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (NLR), Noordoostpolder, 23 februari 1976.
- [50] G. de Vries, T.E. Labrujère, D.H. Norrie, "A LEAST SQUARES FINITE ELEMENT SOLUTION FOR POTENTIAL FLOW", Report No.86, Department of Mechanical Engineering, The University of Calgary, Alberta, Canada, December 1976.
- [FTP] Han de Bruijn, bestanden welke zijn op te halen via Internet, met behulp van "anonymous ftp" (overhalen van bestanden zonder uzelf bekend te maken). De computer: ftp.rc.tudelft.nl. Bestanden: pub/pc/msdos/misc/suna.zip, pub/misc/zonwind.zip, pub/misc/basboek.zip.